

## Überlegungen zur Planung einer magnetischen Atomstrahlresonanzapparatur

VON DIETER VON EHRENSTEIN, GERHARD FRICKE\* und PETER PIETSCH†

Mit 9 Textabbildungen

(Eingegangen am 30. November 1959)

### 1. Einleitung

In einer vorangehenden Veröffentlichung [1] ist ein Atomstrahlresonanzapparatur [2] zur Messung Atomgrundzustände beschrieben worden, mit der ts die tiefsten Elektronenniveaus von  $Y^{89}$  und auf ihre Hyperfeinstruktur untersucht wurden [3], [5]. Diese Anordnung besteht aus n Ofen für schwer verdampfbare Sub- en, aus dem ein Atomstrahl austritt, n der üblichen Weise (vgl. [6], [7]) die n inhomogenen Magnetfelder  $A$  und  $B$  das homogene Magnetfeld  $C$  durch- und mit Hilfe eines Elektronenstoß- ationsdetektors [8] nachgewiesen wird bb. 1). Für eine derartige Apparatur in der vorliegenden Arbeit eine Me- re Ermittlung möglichst günstiger essungen vorgeführt<sup>1</sup>.

Dabei ist zu beachten, daß ein Elek- enstoß-Ionisationsdetektor in seinen nschaften vor allem durch drei Punkte von dem üblichen Oberflächen-Ionisationsdetektor [9]<sup>2</sup> eicht:

1. Es lassen sich auch Elemente nachweisen, deren ne hohe Ionisierungsarbeit besitzen.
2. Das Signal ist proportional der Dichte des Atomes am Detektor, da die Ionisation um so wahr- inlicher wird, je länger sich das Teilchen im Ioni- ngsvolumen aufhält.
3. Es ist vorteilhaft, mit relativ breitem Eintritts- t zu arbeiten (0,4 mm).

Es sei außerdem vorausgesetzt, daß ein „Schatten- t“ den geraden Weg der Atomstrahlteilchen Ofen und Detektor verdeckt. Da der Ein- spalt des Elektronenstoß-Ionisationsdetektors tiv breit ist, muß auch der Durchmesser des attendrahtes entsprechend groß sein. Das er- ert eine erhebliche Auslenkung derjenigen Atome, um diesen Schattendraht herum in den Detektor ngen sollen. Diese Auslenkungen bedingen eine ße räumliche Ausdehnung des Inhomogenitäts- eiches in einem der inhomogenen Felder<sup>3</sup>.

\* Jetzt im Institut für Technische Kernphysik, TH Darm- t.  
† Konstruktionseinzelheiten und Übersichten findet man in [7], [12], [13], [14].

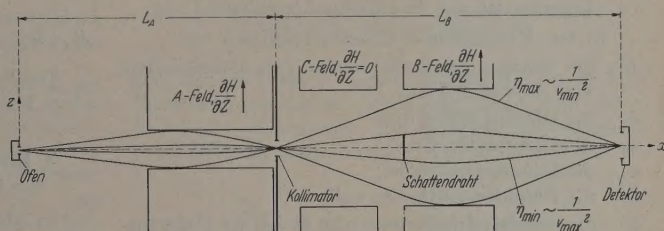
<sup>2</sup> Vergleichsweise gilt für einen Oberflächen-Ionisations- detektor [9]: 1. Es lassen sich nur Elemente nachweisen, n Ionisierungsarbeit höchstens wenig höher als 6 eV ist. Das Signal ist proportional der Anzahl der Teilchen pro hen- und Zeiteinheit. 3. Er kann sehr schmal ausgeführt len.

<sup>3</sup> Im folgenden wird das  $B$ -Feld gewählt und der Schatten- t zwischen Kollimatorspalt und Detektor aufgestellt.

2. f. angew. Physik. Bd. 12

### 2. Aufgabe und Prinzip des Verfahrens

Da der Elektronenstoß-Ionisationsdetektor ein Signal proportional zur Dichte des Atomstrahles liefert, sollen die Abmessungen der Apparatur so gewählt werden, daß im Falle der Hochfrequenzreso- nanz die Dichte am Detektor möglichst groß wird<sup>4</sup>.



Z-Koordinate ist 50-fach vergrößert!

Abb. 1. Prinzip einer Atomstrahlresonanzapparatur. Bei der hier gezeichneten parallelen Stellung der Inhomogenitätsrichtungen in  $A$ - und  $B$ -Feld muß durch Einstellen von Hoch- frequenz im  $C$ -Feld das Vorzeichen des magnetischen Momentes des Atomes geändert werden

Für die Dichte  $D$  des Atomstrahles am Detektor gilt

$$D = D_0(M, T) \cdot h_0 \cdot \frac{I}{L^2} \left[ \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (1)$$

Darin bedeuten:

$D_0(M, T)$  eine durch die Substanz des Molekular- gewichtes  $M$  bestimmte Größe, wenn die Tempe- ratur  $T$  im Ofen so eingestellt wird, daß die mittlere freie Weglänge der Atome im Ofen gleich der Ofen- spaltbreite ist,

$h_0$  die Höhe des Ofenspaltes,

$L$  der Abstand Ofen–Detektor,

$I$  eine Größe, die berücksichtigt, daß bei einer Atom- strahlresonanzapparatur nur Atome innerhalb eines Geschwindigkeitsintervalles  $v_{\min}$  bis  $v_{\max}$  fokussiert werden (s. Abb. 1 und Abschnitt 3).

Die Aufgabe besteht nun eigentlich darin, alle Parameter, von denen die Dichte  $D$  in Gl. (1) abhängt, zu variieren und so  $D$  zu einem Maximum zu machen. Um die Menge dieser zu variierenden Größen jedoch auf eine vernünftige Zahl zu beschränken, ist es nötig, die meisten von vornherein festzulegen. Im folgenden werden diese konstant gelassenen Größen nach drei Gesichtspunkten geordnet:

a) Parameter, die durch das gegebene Meßproblem (Substanz, geforderte Genauigkeit),

<sup>4</sup> Die Forderung lautet bei einem Kondensations-Detektor anders: Die Apertur der Atomstrahlresonanzapparatur soll möglichst groß sein. Solche Berechnungen sind für die üblichen inhomogenen Felder von SILSBEE und SUNDER- LAND [10] und besonders für fokussierende Apparaturen von LEMONICK, PIPKIN und HAMILTON [11] durchgeführt worden. Wir danken Herrn Prof. Dr. W. A. NIERENBERG für eine Dis- kussion über dieses Thema.



b) Parameter, die durch Detektor und sonstige apparative Forderungen (Sättigung des Eisens, Mindestabstände) und

c) Parameter, die durch die Entscheidung für einen Apparatortyp festgelegt werden.

Im einzelnen fallen unter diese drei Punkte folgende Parameter, die nicht variiert werden sollen:

a) Das gegebene Meßproblem bestimmt

$M$ , das Molekulargewicht der Substanz,  
 $T$ , die absolute Verdampfungstemperatur im Ofen,  
 $\mu_A$ , das magnetische Moment der Atome im A-Feld,  
 $\mu_B$ , das magnetische Moment der Atome im B-Feld, die im C-Feld einen Übergang mit Vorzeichenwechsel gemacht haben, und  
 $l_C$ , die Länge des C-Feldes einschließlich der Übergangslängen zum A- und B-Feld. (Im wesentlichen folgt diese Länge aus der geforderten Linienbreite der Hochfrequenzresonanz.)

b) Die Konstruktion schreibt praktisch vor:

$H_S$ , die Sättigungsfeldstärke des Polschuhmaterials von A- und B-Feld,  
 $h_0$ , die Ofenspalthöhe und  
 $b_0$ , die Ofenspalbreite,  
 $h_D$ , die Detektorspalthöhe,  
 $d$ , die Detektorspalbreite und  
 $d$ , die Schattendrahtbreite (wird gleich der Detektorspalbreite gesetzt, damit mit Sicherheit keine Atome vom Ofen unmittelbar in den Detektor gelangen können<sup>1</sup>),  
 $l_0$ , den Mindestabstand zwischen Ofen und Anfang A-Feld,  
 $l_D$ , den Mindestabstand zwischen Ende B-Feld und Detektor;

die inhomogenen Magnetfelder (A- und B-Feld) werden durch ein „Zweidraht-Feld“ [15] im Arbeitspunkt  $z_M = 1,3a$  erzeugt (s. Abschnitt 4)<sup>2</sup>.

c) Man muß sich weiterhin für einen der drei folgenden Apparatortypen entscheiden<sup>3</sup>:

$B'$ , der Schattendraht befindet sich am Anfang des B-Feldes. Dieser Typ ist im folgenden als Beispiel gewählt, während die anderen Typen im Kleindruck behandelt werden<sup>4</sup>.

$B^M$ , der Schattendraht ist an der Stelle der maximalen Auslenkung im B-Feld angebracht. Dieser günstigste Typ ist aber oft konstruktiv nicht einfach,  
 $B''$ , der Schattendraht befindet sich am Ende des B-Feldes<sup>4</sup>.

Durch diese Festlegung ist die Aufgabe, wie in der Rechnung gezeigt wird, auf die Variation dreier Para-

<sup>1</sup> Dies gilt nur solange  $d \geq b_0$  ist.

<sup>2</sup> Das hier angewandte Verfahren läßt sich analog ebenso für einen anderen Arbeitspunkt (z. B.  $z_M = 0,57$ ) oder auf einen anderen Feldtyp anwenden.

<sup>3</sup> Um die Zahl der Möglichkeiten einzuschränken, wurde zweckmäßigerweise bei den Rechnungen angenommen:

a) Der Kollimatorschlitz befindet sich am Ende des A-Feldes.

b) Der Schattendraht steht zwischen Kollimator und Detektor.

Alle Überlegungen lassen sich analog für andere Positionen von Kollimator und Schattendraht durchführen.

<sup>4</sup> Wird die C-Feldlänge sehr kurz gewählt, so kann es vorkommen, daß bei dem Typ  $B^M$  die Dichte am Detektor wesentlich größer wird als bei  $B'$ . Analog darf bei  $B''$  die Länge  $l_D$  nicht zu kurz angesetzt werden.

meter reduziert worden. Zwei dieser Parameter  $\eta_{\min}$  und  $K$ , bestimmen das fokussierte Geschwindigkeitsintervall<sup>5</sup> (s. Abschnitt 3). Der dritte Parameter kennzeichnet den Feldfehler (s. Abschnitt 4).

Es gilt, die ablenkenden Magnetfelder (A- und B-Feld) so zu bemessen, daß bei kleinster Apparatlänge möglichst viele Atome um den Schattendraht herum in den Detektor gelangen, d. h. die Dichte am Detektor bzw.  $I/L^2$  [s. Gl. (1)] als Funktion der drei Variablen  $\eta_{\min}$ ,  $K$  und  $\alpha$  darzustellen und das Maximum von  $D$  zu ermitteln.

Hieraus folgen dann zwangsläufig sämtliche nicht vorgegebenen Apparaturgrößen:

$l_A = L_A - l_0$ ,  $l_B = L_B - l_C - l_D$ , Länge des A- bzw. B-Feldes,

$a_A$ ,  $a_B$ , die Magnetfeldkonstanten (s. Abschnitt 3) des A- bzw. B-Feldes und damit die erreichbaren Feldinhomogenitäten.

$B_A$ ,  $B_B$ , Breite des A- bzw. B-Feldes.

Die Formeln zur Bestimmung aller Größen sind in einer Fußnote in Abschnitt 7 zusammengestellt.

### 3. Berechnung von $I(\eta_{\min}; K)$ in Abhängigkeit des fokussierten Geschwindigkeitsintervalles

In Abb. 1 sind die Bahnkurven für die schnellsten ( $v_{\max}$ ) und für die langsamsten ( $v_{\min}$ ) Atome eingezeichnet, die von der Apparatur fokussiert werden können. Die schnellsten Atome werden durch den Schattendraht und die langsamsten durch die Breite der Luftpalte der inhomogenen Magnetfelder bestimmt. D Faktor  $I$  gibt an, welcher Bruchteil aller Atome fokussiert wird. Da die Anzeige des Elektronenstoßionisationsdetektors proportional zur Dichte des Atomstrahles ist, muß bei der Ermittlung von

$$I = \frac{\int_{v_{\min}}^{v_{\max}} n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv}$$

die Dichteverteilung

$$n(v) dv \sim v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} dv$$

des Atomstrahles eingesetzt werden<sup>6</sup>; dabei bedeutet in bekannter Weise:

$M$  das Molekulargewicht und

$v$  die Geschwindigkeit eines Molekularstrahlteilchens

$k$  die Boltzmann-Konstante,

$T$  die absolute Temperatur des Ofens.

Durch Einführung der dimensionslosen Variable

$$\eta = \frac{kT}{\frac{1}{2} M v^2},$$

<sup>5</sup>  $\eta_{\min}$  ist die Auslenkung der schnellsten Atome (mit der Geschwindigkeit  $v_{\max}$  in Abb. 1), die gerade noch um den Schattendraht herumkommen;  $K/\eta_{\min}$  ist die Auslenkung der langsamsten Atome (mit der Geschwindigkeit  $v_{\min}$  in Abb. 1), die gerade noch nicht an die Polschuhe stoßen.

<sup>6</sup> Bei der Verwendung eines Oberflächen-Ionisationsdetektors [9] müßte man die Stromdichteverteilung

$$n(v) dv \sim v^3 e^{-\frac{Mv^2}{2kT}} dv$$

des Atomstrahles zur Berechnung von  $I$  zugrunde legen.



proportional zur Auslenkung ( $z$ -Koordinate) eines Ions ist, erhält man für die Dichteverteilung

$$n(\eta) d\eta \sim \eta^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{\eta}} d\eta. \quad (6)$$

Abb. 2 ist diese Funktion aufgetragen<sup>1</sup>. Durch das Verhältnis von  $\eta_{\max} = \frac{kT}{\frac{1}{2} M v_{\min}^2}$  zu  $\eta_{\min} = \frac{kT}{\frac{1}{2} M v_{\max}^2}$  ist die dimensionslose Rechengröße

$$K = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}} \quad (7)$$

definiert. Dann wird

$$I(\eta_{\min}; K) = \frac{\left| K \cdot \eta_{\min} \int_{\eta_{\min}}^{\infty} \eta^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{\eta}} d\eta \right|}{\left| \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{1}{\eta}} d\eta \right|}. \quad (8)$$

Das Integral läßt sich durch partielle Integration auf das Fehlerintegral zurückführen und liefert den

Abbildung 1. Prozentualer Anteil des gesamten Atomstrahls<sup>1</sup> in dem Geschwindigkeitsintervall von  $\eta = \eta_{\min}$  bis  $\eta = K \eta_{\min}$

$\eta_{\min}$	0,2	0,4	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
0,5	6,5%	17%	19%	15%	11%	8,0%	6,1%	4,5%
1,0	15%	30%	31%	23%	16%	12%	9,1%	7,2%
1,5	24%	40%	40%	28%	19%	14%	11%	8,5%
2,0	32%	47%	46%	31%	21%	15%	12%	9,2%
2,5	46%	57%	54%	35%	23%	17%	13%	10%
3,0	72%	72%	66%	40%	26%	19%	14%	12%

In Tabelle 1 angegebenen prozentualen Anteil des Atomstrahls für das fokussierte „Geschwindigkeitsintervall“ von  $\eta_{\min}$  bis  $K \cdot \eta_{\min}$ .

#### 4. Erzeugung des inhomogenen Magnetfeldes und Ermittlung des Feldfehlers in Abhängigkeit vom Feldfehlerparameter $\alpha$

Als inhomogenes Magnetfeld verwendet man im allgemeinen das „Zweidraht-Feld“ [15]: Zwei parallele Drähte mit dem doppelten Abstand der Magnetfeldkonstanten  $a$ , die in entgegengesetzter Richtung von Strom durchflossen werden, erzeugen kreiszylindrische Äquipotentialflächen; bildet man von ihnen zwei getrennte durch Eisenpolschuhe nach (s. Abb. 3), so erhält man das gewünschte Feld in dem schraffierten rechteckigen Gebiet. Dieses Gebiet, der „Strahlkasten“, wird zur Ablenkung des Atomstrahls benutzt. Die Strahlkastenbreite ist gleich  $B$ .

Zur quantitativen Diskussion möge das in Abb. 3 angezeichnete Koordinatensystem dienen. Der Atomstrahl fliegt in  $x$ -Richtung, die Strahlhöhe zeigt in  $y$ -Richtung, in  $z$ -Richtung wird der Strahl abgelenkt. Der Mittelpunkt des Strahlkastens soll bei allen Betrachtungen an der Stelle  $y_M = 0, z_M = 1,3a$  liegen.

<sup>1</sup> Die Rechnungen für das Beispiel in Abschnitt 7 und 8 gehen davon aus, daß die durch Gl. (6) theoretisch gegebene Verteilung in einem Atomstrahl auch experimentell angetroffen wird. Untersuchungen zur Geschwindigkeitsverteilung (vgl. [14], [17]) zeigen jedoch, daß man unter Umständen mit einem im Vergleich zur theoretischen Erwartung zu kleinen Anteil der langsamen Geschwindigkeiten zu rechnen muß. Abb. 2 und Tabelle 1 sind daher gegebenenfalls für langsamere Geschwindigkeiten zu korrigieren. Solche Korrekturen bewirken eine Verschiebung in den Ergebnissen des obenbeispiels in Abschnitt 7 und 8.

Die erreichbare Inhomogenität des Magnetfeldes wird durch die Magnetfeldkonstante  $a$  und die Feldstärke im Mittelpunkt des Strahlkastens  $H_M(y_M; z_M)$  bestimmt

$$\left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_{(z/a=1,3; y/a=0)} = 0,966 \frac{|H_M|}{a}.$$

Bei allen Rechnungen wurde die Näherung verwandt

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{|H_M|}{a}. \quad (9)$$

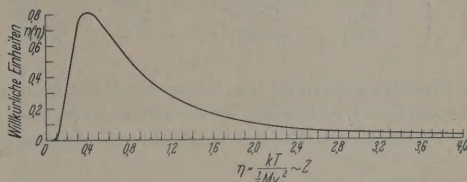


Abb. 2. Verteilung der Dichte in einem abgelenkten Atomstrahl als Funktion der Auslenkung [vgl. Gl. (6)]

Aus den in Abb. 4 eingezeichneten Linien gleicher Feldinhomogenität in  $z$ -Richtung erhält man die in Tabelle 2 angegebenen prozentualen Abweichungen der Inhomogenität, bezogen auf den Strahlkasten.

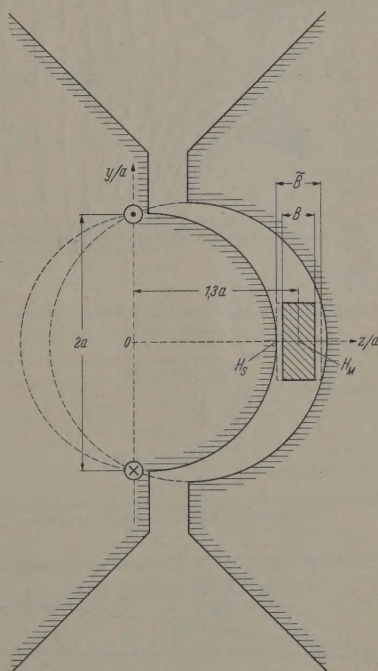


Abb. 3. Querschnitt durch die Polschuhe der inhomogenen Magnetfelder

mittenpunkt. Es ist nur der obere Bereich  $y \geq 0$  tabelliert, da das Feld symmetrisch zur  $z$ -Achse ist.

Bei der Abschätzung der Feldfehler soll zunächst die Abweichung der Feldinhomogenität in Richtung der Strahlhöhe ( $y$ -Achse) betrachtet werden. Die Häufigkeitsverteilung des Atomstrahls in dieser Richtung ist aus Abb. 5 ersichtlich. In einem mittleren Bereich von  $-y_0$  bis  $+y_0$  fliegen die Atome mit gleicher Häufigkeit, während im unteren Bereich  $y < -y_0$  und im oberen Bereich  $y > y_0$  die Häufigkeit



Tabelle 2. Prozentuale Abweichungen der Magnetfeldinhomogenität des Zweidrahtfeldes [15], bezogen auf den Punkt ( $z/a=1,3$ ;  $y/a=0$ )

$z/a$ $y/a$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
0,9	+ 90%	+ 56%	+ 29%	+ 9%	− 6,5%	− 19%	− 30%	− 38%	− 46%
0,8	+ 92%	+ 59%	+ 33%	+ 13%	− 3%	− 17%	− 27%	− 36%	− 44%
0,7	+ 89%	+ 59%	+ 34%	+ 15%	− 1%	− 15%	− 25%	− 34%	− 42%
0,6	+ 84%	+ 56%	+ 34%	+ 15%	− 1%	− 13%	− 24%	− 33%	− 41%
0,5	+ 77%	+ 53%	+ 32%	+ 18%	+ 1%	− 12%	− 23%	− 32%	− 39%
0,4	+ 70%	+ 49%	+ 30%	+ 16%	+ 1%	− 11%	− 22%	− 31%	− 39%
0,3	+ 62%	+ 45%	+ 29%	+ 14%	0%	− 11%	− 21%	− 30%	− 38%
0,2	+ 57%	+ 41%	+ 27%	+ 13%	0%	− 11%	− 21%	− 30%	− 37%
0,1	+ 54%	+ 40%	+ 25%	+ 12%	0%	− 11%	− 21%	− 30%	− 37%
0	+ 53%	+ 39%	+ 25%	+ 12%	0%	− 11%	− 21%	− 30%	− 37%

zur Strahlkastengrenze hin linear bis Null abnimmt<sup>1</sup>. Dies kann man sich leicht klar machen, wenn man für den obersten und untersten Punkt des Ofenspaltes

Magnetfeldkonstanten  $a$  gemessen

$$h = \beta a. \tag{10}$$

Wird der „Höhenfeldfehlerparameter“  $\beta$  größer, so wächst auch die Abweichung von der mittleren Inhomogenität des Feldes. Begrenzt man die Abweichung durch einen größten Wert des Höhenfeldfehlerparameters  $\beta_{\max} = 1,8$ , so kann man über den Fehler der Inhomogenität in der Strahlhöhe mitteln und erhält einen Feldfehler, der nur noch von der  $z$ -Koordinate abhängt. Ebenso wie die Höhe wird auch die Breite des Strahlkastens in Einheiten der Magnetfeldkonstanten  $a$  gemessen

$$B = \alpha a. \tag{11}$$

Für verschiedene Werte des Feldfehlerparameters ist in Abb. 6 unter Berücksichtigung der Höhenverteilung des Atomstrahles die gemittelte Abweichung der Feldinhomogenität eingezeichnet<sup>2</sup>.

Aus Gl. (10) und (11) folgt

$$\alpha \approx \frac{B}{h} \cdot \beta_{\max} = \frac{B}{h} \cdot 1,8; \tag{12}$$

wenn  $B/h$  vorgegeben ist (z. B. beim A-Feld, s. Abschnitt 7) kann man  $\alpha$  nicht beliebig groß wählen, sondern nur bis zu der durch Gl. (12) bestimmten oberen Grenze.

Berücksichtigt man den Einfluß der Feldfehler, so kann es sich herausstellen, daß auch außerhalb des Strahlkastens fliegende Atome fokussiert würden, so daß es zweckmäßig ist, bei festgehaltenener Magnetfeldkonstanten  $a$  die Polschuhe nicht unmittelbar an den Strahlkasten der Breite  $B$  angrenzen zu lassen, sondern an einen breiteren Strahlkasten (s. Abb. 3) mit der effektiven Breite  $\tilde{B}$ . Ebenso ist auch der Fall möglich, daß die effektive Strahlkastenbreite  $\tilde{B}$  kleiner als  $B$  wird. Beide Fälle kommen in dem in Abschnitt 7 und 8 gerechneten Beispiel vor.

Zwischen  $H_M$  und  $H_S$ , der „Sättigungsfeldstärke“, genauer, der Feldstärke, bei der die Fehler infolge der Sättigung des Polschuhmaterials gerade noch ver-

<sup>2</sup> Gibt man für ein Feld z. B.  $\alpha_B = 1/6$  vor (App. 3 in Abschnitt 7), so ist damit der Fehler festgelegt und beträgt am Rand des B-Feldes (s. Abb. 6): in Richtung steigender Inhomogenität + 12%, in Richtung fallender Inhomogenität − 10%.

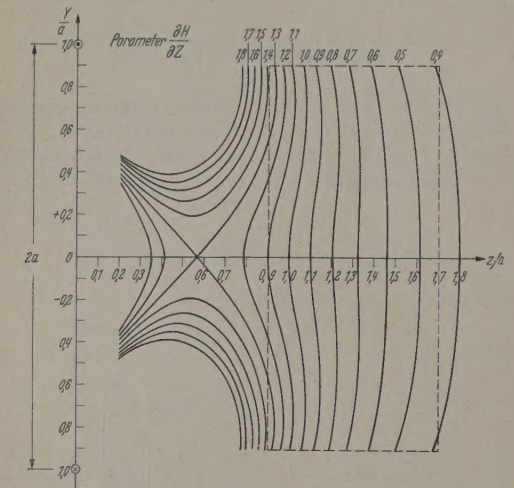


Abb. 4. Linien gleicher Magnetfeldinhomogenität für das Zweidrahtfeld (vgl. [15])

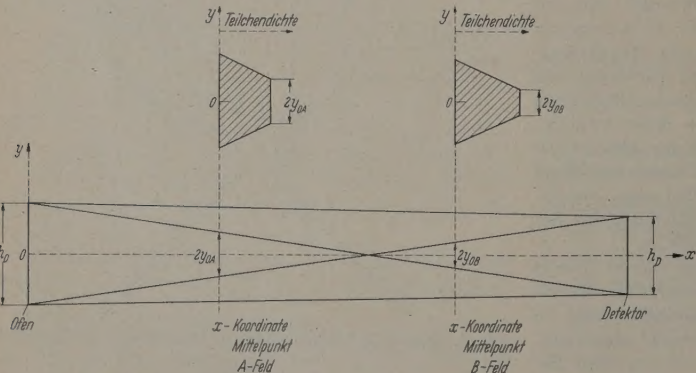


Abb. 5. Verteilung der Teilchendichte des Atomstrahles über die Strahlhöhe

den Winkel in der  $x, y$ -Ebene zeichnet, unter dem die Atome den Detektorspalt erreichen können (s. Abb. 5). Im allgemeinen kann man ansetzen, daß dieser mittlere Bereich die Hälfte der Magnetfeldhöhe ausmacht. Die Höhe des Strahlkastens wird in Einheiten der

<sup>1</sup> Diese Verteilung läßt ein inhomogenes Magnetfeld etwa der Form günstig erscheinen, wie sie durch das Zweidrahtfeld mit dem Mittelpunkt bei  $[(y_M/a)=0; (z_M/a)=0,57]$  gegeben ist.



lässigt werden können, besteht die Beziehung (Abb. 3)

$$H_M = H_S \frac{1 + \left(\frac{z_M}{a} - \frac{\tilde{B}}{2a}\right)^2}{1 + \left(\frac{z_M}{a}\right)^2} \quad (13)$$

er man  $H_M$  ermittelt. Hierzu kann man zunächst annehmen, daß

$$\alpha \approx \frac{\tilde{B}}{a} \approx 0,3 \quad (14)$$

Hat man später einen genaueren Wert für  $B$  gegeben, so kann man den Wert für  $H_M$  korrigieren<sup>1</sup>.

## 5. Ermittlung der B-Feldgrößen $L_B$ , $B_B$ , $a_B$ abhängig von den drei Variablen $\eta_{\min}$ , $K$ und $\alpha_B$

uerst werden die B-Feldabmessungen behandelt. ind der bestimmende Teil der Apparatur, da dort Atome um den Schattendraht herumgelenkt en müssen. Es wird zunächst angenommen, daß Kollimatorspalt beliebig schmal ist, d. h., daß die ne von einem Punkt in das B-Feld starten. Der ttendraht befindet sich am Anfang des B-Feldes. ie schnellsten Atome ( $\eta_{\min}$ ), die noch fokussiert en, erhält man am Ort des Schattendrahtes eine enkung von

$$\frac{d}{2} = \eta_{\min} \frac{\mu_B}{2kT} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_B \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{l_C + l_B + l_D} \cdot l_C \quad (15)$$

die im B-Feld erreichbare Inhomogenität des nnetfeldes gilt [vgl. Gl. (9)]

$$\left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_B = \frac{|H_M|}{\alpha_B} \quad (9b)$$

der Magnetfeldkonstanten  $\alpha_B$  und der Feldstärke  $H_M$  Magnetfeldes im Mittelpunkt des Strahlkastens Abschnitt 4; Abb. 3). Nach Gl. (13) läßt sich  $H_M$  der vorgegebenen Sättigungsfeldstärke des Eisens berechnen. Durch Einführung des Feldfehlermeters (s. Abschnitt 4) für das B-Feld erhält gemäß Gl. (11)

$$\left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_B = \frac{\alpha_B |H_M|}{B_B} \quad (16)$$

mit gilt für die Breite des B-Feldstrahlkastens der druck

$$B_B = \eta_{\min} \frac{\mu_B |H_M|}{kT} \frac{\alpha_B}{d} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{l_C + l_B + l_D} \cdot l_C \quad (17)$$

em außer den vorgegebenen Größen nur noch die ichte B-Feldlänge  $l_B$  bzw.  $L_B$  und die Variablen  $\eta_{\min}$   $\alpha_B$  enthalten sind.

Aus Abb. 7 ergibt sich eine weitere Beziehung für  $B_B$

$$\frac{B_B}{2} = K \frac{d}{2} + \gamma_3 \frac{x_B}{2} \quad (18)$$

$$\gamma_3 = \frac{K d}{2 l_C} \quad (19)$$

$$x_B = \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{l_C + l_B + l_D} \quad (20)$$

Am Beispiel in Abschnitt 7 und 8 sieht man, daß die chbare Dichte am Detektor nur schwach von  $\alpha$  abhängt. wird  $\alpha$  um den Faktor 4 geändert, während obige Korrektur etwa 5 bis 10% ausmacht.

dem Abstand zwischen Anfang B-Feld und dem Ort der größten Auslenkung im B-Feld. Damit folgt

$$B_B = K d \left( 1 + \frac{1}{2 l_C} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{l_C + l_B + l_D} \right) \quad (21)$$

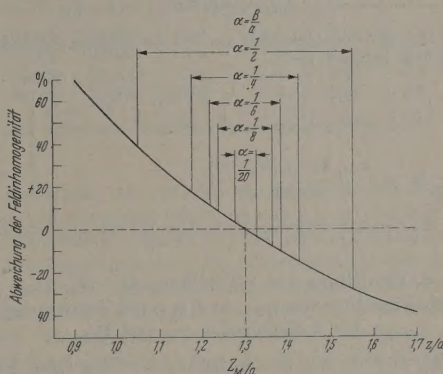


Abb. 6. Abweichung von der mittleren Feldinhomogenität, gemittelt über die Strahlhöhe

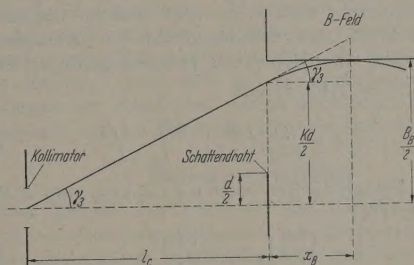


Abb. 7. Strahlengang zwischen dem Kollimatorspalt und dem Orte der größten Auslenkung im B-Feld. Erläuterung zu den Formeln (18) bis (20)

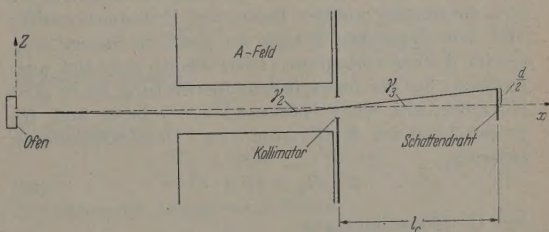


Abb. 8. Strahlengang vom Ofen bis zum Schattendraht zur Ermittlung der Formeln zur Bestimmung der A-Feldgrößen

Durch Gleichsetzen von Gl. (17) und (21) und Auflösen nach  $L_B = l_C + l_B + l_D$  erhält man<sup>2,3</sup>

$$L_B' = \frac{2 l_C}{M' - 1} + l_C + \sqrt{\left( \frac{2 l_C}{M' - 1} \right)^2 M' + l_D^2} \quad (22)$$

mit

$$M' = \frac{\eta_{\min} \alpha_B \mu_B |H_M| \cdot 2 l_C}{K k T d^2}$$

Damit ist die B-Feldlänge als Funktion von  $\eta_{\min}$ ,  $K$  und  $\alpha_B$  dargestellt, alle anderen Größen sind vorgegeben.

<sup>2</sup> Der Index am  $B$  bedeutet, daß diese Beziehung gilt, wenn der Schattendraht am Anfang des B-Feldes angebracht ist (vgl. die Einteilung der Apparaturtypen Abschn. 2c).

<sup>3</sup> Die potentielle Energie, die die Atome auf ihrem Weg durch das inhomogene Magnetfeld (hier B-Feld) vorübergehend gewinnen können, muß größer sein als ihre kinetische Energie in  $z$ -Richtung (Ablenkrichtung), um sie fokussieren zu können. Daher müssen  $M'$  und  $M''$  stets größer als eins sein.



Nach ähnlicher Überlegung bekommt man

$$\left. \begin{aligned} L_{BM} &= \sqrt{M^2 + l_C^2} + \sqrt{M^2 + l_D^2} \\ \text{mit} \quad MM &= \frac{K \cdot k \cdot T \cdot 2d^2}{\eta_{\min} \alpha_B \mu_B |H_M|} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wenn sich der Schattendraht am Ort der größten Auslenkung im  $B$ -Feld befindet und<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} L_{B''} &= \frac{2l_D}{M'' - 1} + l_D + \sqrt{\left(\frac{2l_D}{M'' - 1}\right)^2 M''^2 + l_C^2} \\ \text{mit} \quad M'' &= \frac{\eta_{\min} \alpha_B \mu_B |H_M| 2l_D^2}{K \cdot k \cdot T \cdot d^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wenn der Schattendraht am Ende vom  $B$ -Feld angebracht ist.

## 6. Ermittlung der A-Feldlänge $L_A = l_0 + l_A$ als Funktion von $\eta_{\min}$ und $\alpha_A$ und Festlegung der A-Feldgrößen $\alpha_A$ und $B_A$

Das  $A$ -Feld hat die Aufgabe, die vom Ofen kommenden Atome unter dem Winkel  $\gamma_3$  am Kollimator in das  $B$ -Feld einzuschließen (s. Abb. 8). Die Breite des Kollimators wird so gewählt, daß bei abgeschalteten Feldern ohne Schattendraht der „Kernstrahl“ ungehindert vom Ofen in den Detektor gelangen kann.

Für  $\gamma_2$  (s. Abb. 8) gilt

$$\gamma_2 = \eta \frac{\mu_A}{2kT} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_A \frac{\frac{1}{2} l_A^2 + l_A l_0}{l_A + l_0}, \quad (25)$$

für den Feldgradienten setzt man analog zum  $B$ -Feld [vgl. Gl. (16)]

$$\left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_A = \frac{\alpha_A |H_M|}{B_A}. \quad (26)$$

Die erforderliche Breite des  $A$ -Feldstrahlkastens setzt sich zusammen aus der Breite des Kollimatorspaltes und dem doppelten Betrag der größten Auslenkung, die im  $A$ -Feld vorkommt. Diese Breite ließe sich ausrechnen; bei der numerischen Auswertung ist es aber einfacher, mit einer Näherung zu rechnen und  $B_A$  proportional zur Kollimator- bzw. Detektorbreite zu setzen<sup>2</sup>

$$B_A = \varphi \cdot d. \quad (27)$$

Mit Gl. (26) erhält man

$$\left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_A = \frac{\alpha_A |H_M|}{\varphi d} \quad (28)$$

damit wird

$$\gamma_2 = \eta \frac{\mu_A |H_M| \alpha_A}{2kT \varphi d} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_A^2 + l_A l_0}{l_A + l_0}. \quad (29)$$

Befindet sich der Schattendraht am Anfang des  $B$ -Feldes, so ersieht man aus Abb. 8 die Beziehung

$$\gamma_{3\min} = \frac{d}{2l_C}. \quad (30)$$

Damit die Atome in den Detektor fokussiert werden, muß

$$\gamma_2 = \gamma_3 \quad (31)$$

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 3, S. 197.

<sup>2</sup> Beispielsweise ist  $\varphi = 1,5$  der in der späteren Rechnung angenommene Wert (s. Abschn. 7). Stellt sich bei der Endlösung heraus, daß die Breite des  $A$ -Feldstrahlkastens nicht ausreicht, so kann man mit einem etwas größeren  $\varphi$  die  $A$ -Feldlänge neu bestimmen, ohne daß sich die Gesamtlänge der Apparatur wesentlich ändert.

sein<sup>3</sup>. Aus der Fokussierungsbedingung und aus Gl. (29) und (30) erhält man durch Auflösen nach  $L_A = l_A + l_0$

$$\left. \begin{aligned} L_A &= F' + \sqrt{F'^2 + l_0^2} \\ \text{mit} \quad F' &= \frac{1}{\eta_{\min} \alpha_A} \cdot \frac{kT \varphi d^2}{\mu_A |H_M|} \cdot \frac{1}{l_C} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

für den Fall, daß sich der Schattendraht am Anfang des  $B$ -Feldes befindet.

Befindet sich der Schattendraht am Ende vom  $B$ -Feld, so ist  $F'$  durch  $F''$  in Gl. (33) zu ersetzen. Steht der Schattendraht am Ort der größten Auslenkung im  $B$ -Feld, so ist  $F'$  statt  $F'$  in Gl. (33) einzusetzen. In ähnlicher Weise wie oben erhält man für

$$\left. \begin{aligned} F'' &= \frac{1}{\eta_{\min} \alpha_A} \cdot \frac{kT \varphi d^2}{\mu_A |H_M|} \times \\ &\times \frac{l_B + l_C + l_D}{l_C(l_B + l_C + l_D) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}l_B^2 + l_B l_D)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

und

$$F'' = \frac{1}{\eta_{\min} \alpha_A} \cdot \frac{kT \varphi d^2}{\mu_A |H_M|} \cdot \frac{l_B + 2l_D}{l_D(l_B + 2l_C)}. \quad (35)$$

Mit den in den letzten Abschnitten erhaltenen Formeln läßt sich für vorzuziehende Feldfehlerparameter  $\alpha$  ein größtes  $I/L^2$  bzw.  $D$  ermitteln. Ein Beispiel wird im nächsten Abschnitt vorgerechnet.

## 7. Berechnung der günstigsten Apparaturabmessungen ohne Berücksichtigung der Feldfehler

An dem Beispiel des Apparaturtypes, bei dem der Schattendraht am Anfang vom  $B$ -Feld steht, soll die Ermittlung des Maximums für  $D$  bzw.  $I/L^2$  gezeigt werden.

Die in Abschnitt 2 erklärten Größen haben bei diesem Beispiel folgende Werte:

$$\begin{aligned} T &= 1900^\circ \text{K} \\ \mu_A &= \mu_B = 0,4 \mu_{\text{Bohr}} = 0,4 \cdot 9,27 \cdot 10^{-21} \text{ erg/Gauß} \\ l_0 &= l_C = l_D = 10 \text{ cm} \\ H_S &= 20000 \text{ Gauß} \\ h_0 &= 0,8 \text{ cm}; b_0 = 10^{-2} \text{ cm}; \\ d &= 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}; h_D = 0,6 \text{ cm} \\ \varphi &= 1,5. \end{aligned}$$

Das Molekulargewicht der Substanz braucht nicht vorgegeben zu werden, da es keinen Einfluß auf die Abmessungen der Apparatur hat.

Zunächst soll die Feldstärke in der Mitte des Strahlkastens,  $H_M$ , abgeschätzt werden. Mit der Annahme einer effektiven Magnetfeldbreite von  $\tilde{B} = 0,3$  erhält man nach Gl. (13)

$$H_M = H_S \cdot 0,85 = 17000 \text{ Gauß}.$$

Für den Abstand Kollimator–Detektor, der nach Gl. (22) ermittelt wird, erhält man mit  $l_0 = l_C = l_D = 10 \text{ cm}$  den vereinfachten Ausdruck

$$L_{B'} = 20 \frac{M' + 1}{M' - 1} [\text{cm}] \quad \text{mit} \quad M' = 30 \frac{\eta_{\min} \alpha_B}{K}.$$

<sup>3</sup> Die allgemein gebräuchliche Form der Fokussierungsbedingung lautet [16]

$$-\frac{\mu_A \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_A}{\mu_B \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)_B} = \frac{L_A}{L_B} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{\frac{1}{2} l_A^2 + l_A l_0}. \quad (32)$$



Tabelle 3. Ergebnisse für das in Abschnitt 7 gewählte Beispiel ohne Berücksichtigung der Feldfehler

$\alpha_A$	$\alpha_B$	$\eta_{\min}$	$K$	$I$ [%]	$B_A$	$B_B$	$a_A$	$a_B$	$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_A$	$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_B$	$l_A$	$l_B$	$L$	$\frac{I}{L^2}$
					[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	$\left[\frac{\text{Gauß}}{\text{cm}}\right]$	$\left[\frac{\text{Gauß}}{\text{cm}}\right]$	[cm]	[cm]	[cm]	[cm <sup>-2</sup> ]*
1/7,4	1/2	1,0	3,0	31	0,6	1,5	4,44	3,0	38000	57000	10,0	10,0	50,0	$12,4 \cdot 10^{-5}$
1/7,4	1/4	1,5	2,5	19	0,6	1,3	4,44	5,2	38000	33000	6,0	11,4	47,4	$8,5 \cdot 10^{-5}$
1/7,4	1/6	1,5	2,0	16	0,6	1,1	4,44	6,6	38000	26000	6,0	14,6	50,6	$6,3 \cdot 10^{-5}$
1/7,4	1/8	2,0	2,0	12	0,6	1,1	4,44	8,8	38000	19000	4,5	14,6	49,1	$5,0 \cdot 10^{-5}$

Die „Dichte“ eines nicht abgelenkten unmittelbaren Strahles (der sämtliche Geschwindigkeitsintervalle enthält) sei in Abstand vom Ofen  $I/L^2 = 1 \text{ cm}^{-2}$ .

Abstand Ofen—Kollimator bestimmt man nach (33)

$$= F' + \sqrt{F'^2 + 100} \text{ [cm]} \text{ mit } F' = \frac{1,01}{\eta_{\min} \alpha_A} \text{ [cm]}.$$

Man nehme die Höhe des A-Feldes gleich der Ofenspalte, so erhält man nach Gl. (12) als größten Wert den Feldfehlerparameter des A-Feldes

$$\alpha_{A \max} = \frac{B_A}{h_A} \cdot 1,8 = \frac{\varphi d}{h_A} \cdot 1,8 = \frac{1,5 \cdot 0,04 \cdot 1,8}{0,8} = \frac{1}{7,4}.$$

Berechnet man für alle Kombinationen von  $\eta_{\min}$  und  $K$  den Ausdruck  $\frac{I}{(L_A + L_B)^2}$ , so erhält man für jeden Wert Feldfehlerparameters  $\alpha_A$  und  $\alpha_B$  ein Maximum mit zugehörigem  $\eta_{\min}$  und  $K$ . Dieses Beispiel wurde für Feldfehlerparameter  $\alpha_B = 1/2, 1/4, 1/6$  und  $1/8$  berechnet. Da der größte Wert des A-Feldfehlerparameters  $\alpha_{A \max} = 1/7,4$  ist, wurde  $\alpha_A = 1/7,4$  gesetzt, und der Feldfehlerparameter des B-Feldes  $\alpha_B$  variiert. Ergebnis zeigt Tabelle 3. Die wichtigsten Formeln zur Berechnung der Apparatur sind in einer Fußnote zusammengefaßt<sup>1</sup>.

A-Feldgrößen.

Stärke des Magnetfeldes

$$B_A = \varphi d; \quad (27)$$

Magnetfeldkonstante

$$\alpha_A = \frac{B_A}{a_A}; \quad (11a)$$

Inhomogenität

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_A = \frac{|H_M|}{a_A} = \frac{|H_M| \alpha_A}{B_A}; \quad (9a) \quad (26)$$

Auslenkung am Anfang des A-Feldes

$$z_A^*(\eta) = \eta \frac{\mu_A |H_M|}{2kT} \frac{\alpha_A}{B_A} \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A} l_0; \quad (36)$$

Größte Auslenkung im A-Feld für ein fokussiertes Teilchen

$$z_A^{\max}(\eta) = \eta \frac{\mu_A |H_M|}{2kT} \frac{\alpha_A}{B_A} \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A} \left( \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A} + l_0 \right); \quad (37)$$

Abstand vom Anfang des A-Feldes bis  $z_A^{\max}(\eta)$

$$x_A = \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A}; \quad (38)$$

Effektive Breite des A-Feldes

$$= \tilde{\eta}_{\max} \frac{\mu_A |H_M|}{kT} \frac{\alpha_A}{B_A} \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A} \left( \frac{\frac{1}{2} l_A^2}{L_A} + l_0 \right) + d \frac{L_A}{L} + b_0. \quad (39)$$

B-Feldgrößen.

Breite des B-Feldes, wenn der Schattendraht am Anfang des Feldes steht

$$B_B' = K d \left( 1 + \frac{1}{2 l_C} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{L_B} \right) \quad (21)$$

entsprechend gilt

$$B_{BM} = K d \quad (40)$$

Auffallend ist, daß die Gesamtlänge der Apparaturen beinahe gleich bleibt, obwohl  $\alpha_B$  um den Faktor 4 geändert wurde. Spalte 12 zeigt, daß mit wachsendem Feldfehlerparameter  $\alpha_B$  die Inhomogenität des B-Feldes zunimmt. Hierdurch ist es möglich, Atome mit größerer Geschwindigkeit (s. Spalte 4) zu fokussieren, deren Häufigkeit zunimmt, da alle fokussierten Geschwindigkeiten kleiner als die für das Maximum der Dichte ( $\eta = 0,4$ ) sind (s. Abb. 2). Als Ergebnis ist die zur Atomstrahllichte proportionale Größe  $I/L^2$  in Spalte 16 eingetragen. Der größte Wert wird von der Apparatur mit dem größten  $\alpha_B$  erreicht; Apparatur 1 ist etwa 2,5mal „lichtstärker“ als Apparatur 4. Dies Ergebnis wird sich bei Berücksichtigung des Einflusses der Feldfehler, die im nächsten Abschnitt untersucht werden sollen, noch etwas ändern.

## 8. Einfluß der Feldfehler

Der Einfluß der Feldfehler auf die Atomstrahldichte am Detektor wird durch ein graphisches Verfahren abgeschätzt, bei dem auch die endlichen Spaltbreiten näherungsweise berücksichtigt werden sollen.

bzw.

$$B_{B''} = K d \left( 1 + \frac{1}{2 l_D} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_C}{L_B} \right); \quad (41)$$

Magnetfeldkonstante

$$\alpha_B = \frac{B_B}{a_B}; \quad (11b)$$

Feldinhomogenität

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)_B = \frac{|H_M|}{a_B} = \frac{|H_M| \alpha_B}{B_B}; \quad (9b) \quad (16)$$

Auslenkung am Anfang des B-Feldes

$$z_B^*(\eta) = \eta \frac{\mu_A |H_M|}{2kT} \frac{\alpha_A}{B_A} \left( \frac{\frac{1}{2} l_A^2 + l_A l_0}{L_A} \right) l_C; \quad (42)$$

Größte Auslenkung im B-Feld für ein fokussiertes Teilchen

$$z_B^{\max}(\eta) = \eta \frac{\mu_B |H_M|}{2kT} \frac{\alpha_B}{B_B} \cdot \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{L_B} \times \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{2 L_B} + l_C \right); \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Abstand vom Anfang des B-Feldes bis  $z_B^{\max}(\eta)$

$$x_B = \frac{\frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D}{L_B}; \quad (20)$$

Auslenkung am Ende des B-Feldes

$$z_B^{\pm}(\eta) = \eta \frac{|H_M|}{2kT} \left[ \mu_A \frac{\alpha_A}{B_A} (l_C + l_B) \times \left( \frac{\frac{1}{2} l_A^2 + l_A l_0}{L_A} \right) + \mu_B \frac{\alpha_B}{B_B} \frac{l_B^2}{2} \right]; \quad (44)$$

effektive Breite des B-Feldes

$$\tilde{B}_B = \frac{\tilde{\eta}_{\max}}{\eta_{\max}} B_B. \quad (45)$$



Hierbei wird ermittelt

1. Wieviele der Atome, die sich innerhalb des durch  $\eta_{\min}$  und  $\eta_{\max}$  festgelegten Geschwindigkeitsintervalles befinden, durch Feldfehler *nicht* fokussiert werden oder dadurch verloren gehen, daß sie auf Blenden, Schattendraht oder Polschuhe auftreffen.

2. Wieviele Atome mit der „Geschwindigkeit“  $\eta < \eta_{\min}$  infolge der endlichen Spaltbreiten noch um den Schattendraht herum in den Detektor gelangen.

3. Wieviele Atome mit „Geschwindigkeiten“  $\eta > \eta_{\max}$  noch zusätzlich fokussiert werden können, wenn man die Polschuhe, ohne  $a$  zu ändern, so baut, daß sie nicht unmittelbar an den Strahlkasten der Breite  $B$

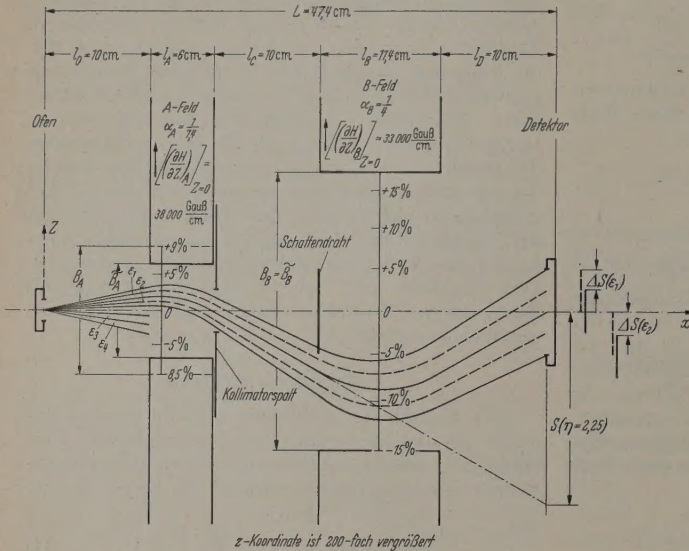


Abb. 9. Erläuterung des graphischen Verfahrens zur Abschätzung des Einflusses der Feldfehler an Hand der Apparatur 2 (vgl. Tabelle 3). Der Offenspalt ist hierbei unendlich schmal gedacht

angrenzen, sondern durch eine effektive Breite  $\tilde{B}$  begrenzt werden (s. Abb. 3). Eine effektive „Geschwindigkeit“  $\tilde{\eta}_{\max}$ , für die gilt, daß Teilchen mit einer „Geschwindigkeit“  $\eta > \tilde{\eta}_{\max}$  nicht mehr fokussiert werden, soll  $\tilde{B}$  bestimmen [vgl. Gl. (45) in der Fußnote von Abschnitt 7].

Zur Durchführung der Abschätzung zeichnet man einen maßstabsgerechten Horizontalschnitt der Apparatur<sup>1</sup>. Hierbei ist es zweckmäßig, den  $z$ -Maßstab etwa 200fach zu vergrößern. An der Stelle der größten Auslenkung im A- und B-Feld schreibt man die aus Abb. 6 entnommenen Feldfehler ein (vgl. Abb. 9). Den für die Apparatur in Frage kommenden Geschwindigkeitsbereich unterteilt man in kleine Geschwindigkeitsintervalle<sup>2</sup>. Für die Abschätzung wird eine mittlere Geschwindigkeit und Häufigkeit für alle Intervalle ermittelt<sup>3</sup> und die unter 1., 2. und 3. geforderte Teilchenbilanz aufgestellt.

An einem Intervall der Apparatur 2 mit der mittleren Geschwindigkeit, die  $\eta = 2,25$  entspricht, soll dies vorgeführt werden. Atome mit dieser Geschwin-

digkeit können innerhalb der in Abb. 9 eingezeichneten Winkelbereiche  $\varepsilon_1$  bis  $\varepsilon_4$  den Detektor erreichen. Die Winkelbereiche sind so eingeteilt, daß sie der oberen oder unteren Detektorhälfte zugeordnet sind. Die Winkel sind durch gleiche Bahnkurven, die für das mittlere  $\eta = 2,25$  berechnet sind, begrenzt (s. Abb. 9).

Die im Winkelbereich  $\varepsilon_1$  startenden Atome durchfliegen im A-Feld im Mittel eine 3,1% zu große Inhomogenität und im B-Feld, wo sie in entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden, eine 7,5% zu schwache Inhomogenität<sup>4</sup>. Beide Feldfehler bewirken eine Ablenkung am Detektor von  $\Delta S$  in negativer  $z$ -Richtung, d.h. sie addieren sich. Zur Berechnung von  $\Delta S$  benötigt man die Auslenkung am Detektor,  $S$ , die vom A- oder B-Feld allein erzeugt wird. Bei einer vorgegebenen Apparatur ist  $S = S(\eta)$  nur eine Funktion von  $\eta$ . Steht der Schattendraht am Anfang vom B-Feld, so ist

$$S(\eta) = \frac{\eta}{\eta_{\min}} \frac{d}{2} \cdot \frac{l_C + l_B + l_D}{l_C}, \quad (46)$$

oder allgemein

$$S(\eta) = \eta \frac{\mu_B |H_M|}{2kT} \frac{\alpha_B}{B_B} \left( \frac{1}{2} l_B^2 + l_B l_D \right). \quad (47)$$

Für den Winkelbereich  $\varepsilon_1$  und die Geschwindigkeit, die  $\eta = 2,25$  entspricht, erhält man eine Verschiebung in negativer  $z$ -Richtung von

$$\begin{aligned} \Delta S(\varepsilon_1; \eta = 2,25) &= S(\eta = 2,25) (3,1\% + 7,5\%) \\ &= S(\eta = 2,25) \cdot 0,106. \end{aligned}$$

Die Atome des Winkelbereiches  $\varepsilon_1$  und  $\eta = 2,25$  gelangen alle in den Detektor, da diese Verschiebung ausreicht, um sie am Schattendraht vorbeizulenken.

andererseits ist die Verschiebung noch so klein, daß sie nicht über die untere Grenze des Detektors hinausgelangen können (s. Abb. 9). Anders ist das Ergebnis für die im Winkelbereich  $\varepsilon_2$  startenden Atome. Diese erfahren im Mittel im A-Feld eine 1,5% zu starke und im B-Feld eine 10,5% zu geringe Ablenkung (s. Abb. 9). Die Verschiebung am Detektor, ebenfalls in negativer  $z$ -Richtung, beträgt

$$\begin{aligned} \Delta S(\varepsilon_2; \eta = 2,25) &= S(\eta = 2,25) (1,5\% + 10,5\%) \\ &= S(\eta = 2,25) \cdot 0,12. \end{aligned}$$

So gelangen im Winkelbereich  $\varepsilon_2$  durch Feldfehler 57% neben den Detektor; Blendenverluste treten nicht auf.

Führt man diese Abschätzungen für alle Geschwindigkeitsintervalle und Winkelbereiche der vier Apparaturen durch, so kommt man zu den in Tabelle 4 dargestellten Ergebnissen.

Wie man erwartet, nehmen die Defokussierungsverluste mit kleinerem Feldfehlerparameter ab. Man sieht aus Spalte 3 und 4, daß beispielsweise bei Apparatur 1 die Fehler so groß sind, daß keine Atome im Intervall  $2,5 \leq \eta \leq 3$  fokussiert werden. Die Ände-

<sup>1</sup> Die Abmessungen lassen sich mit den in der Fußnote von Abschnitt 7 aufgeführten Formeln berechnen.

<sup>2</sup> Für die hier berechneten Apparaturen wurden 5 bis 7 Intervalle der Breite  $\Delta\eta = 0,5$  angenommen.

<sup>3</sup> Die jeder Geschwindigkeit zugeordnete Häufigkeit kann man aus Abb. 2 entnehmen.

<sup>4</sup> Näherungsweise wird die Abweichung von der Sollinhomogenität am Maximum der Auslenkung als Abweichung auf der gesamten Länge der Felder angesehen.



Tabelle 4. Ergebnisse für das in Abschnitt 7 gewählte Beispiel bei Berücksichtigung der Feldfehler

$\alpha_B$	$\eta_{\text{Max}}$	$\tilde{\eta}_{\text{Max}}$	$B_A$ [mm]	$\tilde{B}_A$ [mm]	$B_B$ [mm]	$\tilde{B}_B$ [mm]	Verlust		Gewinn		Bilanz	$\left(\frac{I}{L^3}\right)^*_{\text{korrr}}$ [cm <sup>-2</sup> ]
							Def.	Blenden	$\eta < \eta_{\text{Min}}$	$\eta > \eta_{\text{Max}}$		
1/2	3	2,5	0,6	0,58	1,5	1,25	—48%	—14%	+24%	0	—38%	$7,1 \cdot 10^{-5**}$
1/4	3,75	3,75	0,6	0,43	1,3	1,3	—27%	—21%	+30%	0	—18%	$7,0 \cdot 10^{-5}$
1/6	3	3,5	0,6	0,39	1,1	1,29	—19%	—20%	+31%	+5%	—3%	$6,1 \cdot 10^{-5}$
1/8	4	4,5	0,6	0,52	1,1	1,24	—16%	—20%	+31%	+6%	+1%	$5,0 \cdot 10^{-5}$

\* Vgl. Fußnote \* von Tabelle 3 auf S. 199.  
Bei App. 1 darf im  $B$ -Feld laut Gl. (12) eine Strahlhöhe von  $H_B = \beta \cdot \frac{B_B}{\alpha_B} = 1,8 \cdot \frac{1,5}{0,5} = 5,4$  mm nicht überschritten werden. Die tatsächliche Strahlhöhe im  $B$ -Feld, die sich aus der Ofenspalthöhe und der Detektorspalthöhe ermitteln läßt, beträgt 5 mm. Die erforderliche Reduktion der Strahlhöhe von 20% bringt aber nur eine Intensitätsabnahme von etwa 5%, da, wie Abb. 5 ersichtlich, die Teilchendichte im oberen und unteren Bereich des Strahlkastens geringer als in der Mitte ist (siehe Abschnitt 4). Diese Korrektur, die nur bei App. 1 erforderlich ist, ist in Tabelle 4 berücksichtigt.

des Feldfehlerparameters um den vierfachen Betrag ergibt nur noch einen Unterschied in der Dichte des Atomstrahles am Detektor von etwa 40%.

9. Diskussion

a) Diskussion der Ergebnisse

Tabelle 3 in Abschnitt 7 führt zu dem Ergebnis, daß Apparaturen mit großen Inhomogenitäten (und mit großen Feldfehlerparametern  $\alpha$ ) ein großes Signal am Detektor liefern. Der Faktor 2,5 im Signal, in unserem Beispiel App. 1 (mit großer Inhomogenität im  $B$ -Feld) im Vergleich zu App. 4 (mit geringer Inhomogenität im  $B$ -Feld) aufweist, wird durch die Fehlerbetrachtung in Abschnitt 8, deren Ergebnisse in Tabelle 4 zusammengestellt sind, zwar etwas verkleinert, immerhin erscheinen aber auch in Tabelle 4 die Apparaturen mit großen Inhomogenitäten günstiger. Allerdings ist das Signal am Detektor App. 1 und 2 praktisch gleich, so daß man App. 2 wählen sollte, weil für den kleineren Feldfehlerparameter  $\alpha_B = 1/4$  die in Abb. 6 gegebene Näherung genauer Unsicherheit bringt<sup>1</sup>. Bemerkenswert ist, daß die Gesamtlänge der betrachteten Apparaturen praktisch gleich ist.

b) Diskussion der wichtigsten Näherungen

Zur Erläuterung der in Abschnitt 5 und 6 genannten Formeln wurde in Abschnitt 7 ein willkürlich gewähltes Beispiel in nicht allzu kleinen Variationsstufen ( $\alpha_B = 1/2, 1/4, 1/6, 1/8; \Delta\eta_{\text{min}} = 0,5; \Delta\eta_{\text{max}} = 0,5$ ) durchgerechnet, und auf diese Art nur ein mögliches Maximum gewonnen. Die  $A$ -Feldabmessungen wurden praktisch nicht variiert ( $\alpha_A = \text{const} = 4$ ). Der Einfluß der Feldfehler ist nur für die in Tabelle 3 genannten Apparaturen ausgerechnet worden. Da als Ergebnis jedoch ein flaches Maximum auskommt, scheinen diese Näherungen sicherlich genünftig.

Die weiteren Näherungen, die bei der Abschätzung des Einflusses der Feldfehler gemacht wurden<sup>2</sup>, und die unvollständige Berücksichtigung der endlichen Strahlbreiten<sup>3</sup> bringen eine gewisse Unsicherheit im

<sup>1</sup> Weiterhin ist bei Apparatur 2 die effektive Breite des Feldes  $B_A$  (s. Tabelle 4, Spalte 5 und 6) kleiner als die benannte Breite  $B_A$ , so daß man durch Verkürzen des Feldes die „Lichtstärke“ etwas erhöhen könnte.

<sup>2</sup> Vgl. z. B. Abb. 6; ferner den Ersatz der Kurve aus Abb. 2 durch eine Treppenkurve mit den Schrittlängen  $\eta = 0,5$ .

<sup>3</sup> Bei der Abschätzung des Einflusses der Feldfehler wurde der Ofenspalt beliebig schmal angenommen; der Kollimator- und Detektorspalt wurde in nur zwei Hälften geteilt betrachtet.

Ergebnis, die sich allerdings nur durch einen erheblichen Rechenaufwand wesentlich verbessern läßt.

Die Schattendrahtbreite wurde nicht variiert, sondern stets gleich der Detektorspaltbreite gesetzt. Weicht man von dieser zu vorsichtigen Bedingung ab, so wird die Rechnung grundsätzlich eine etwas höhere Atomstrahldichte am Detektor ergeben<sup>4</sup>.

c) Diskussion der Methode

Wie schon in der Einleitung erwähnt, beruht das ganze hier beschriebene Verfahren wesentlich darauf, daß der unmittelbare Weg vom Ofen zum Detektor durch einen Schattendraht abgedeckt werden soll. Das ist im vorliegenden Fall erwünscht, um den Teil des Atomstrahles, dessen Atome nicht den gesuchten Hochfrequenzübergang im  $C$ -Feld gemacht haben, vom Detektor fernzuhalten<sup>5</sup>. Auf diesen Schattendraht sollte nicht verzichtet werden, wenn die für den Elektronenstoß-Ionisationsdetektor [8] erforderliche Modulation durch einen mechanischen Atomstrahlunterbrecher erzeugt wird. Moduliert man jedoch nur den Teilstrahl, der den gesuchten Hochfrequenzübergang gemacht hat<sup>6</sup>, so kann man möglicherweise auf den Schattendraht verzichten.

Zusammenfassung

Ein Verfahren zur Berechnung möglichst günstiger Abmessungen bei der Konstruktion einer „lichtstarken“ Atomstrahlresonanzapparatur mit dem üblichen Zweidrahtfeld und einem Elektronenstoß-Ionisationsdetektor wird beschrieben. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens wird mit einem Rechenbeispiel erläutert, wobei die jeweils günstigsten Apparaturen für einige vorgegebene zulässige Größtfehler der Inhomogenitäten der beiden Ablenkfelder ermittelt werden; diese Apparaturen unterscheiden sich praktisch nicht in der Gesamtlänge des Atomstrahles. Die näherungsweise Abschätzung des Einflusses der Feldfehler mit einem graphischen Verfahren ergibt, daß

<sup>4</sup> Statt die Rechnung zu verfeinern, ist es wohl günstiger, einen während des Betriebes in seiner Dicke veränderlichen Schattendraht einzubauen und den günstigsten Durchmesser experimentell zu ermitteln.

<sup>5</sup> Bei anderen Arten von Detektoren und Strahlquellen können auch andere Gründe für die Verwendung eines Schattendrahtes sprechen, wenn z. B. ein beachtlicher Teil des Strahlers in Form von nicht dissoziierten (und nicht abgelenkten) Molekülen aus der Strahlquelle austritt.

<sup>6</sup> Etwa dadurch, daß man die eingestrahlte Hochfrequenz mit der Modulationsfrequenz aus- und einschaltet, oder daß man dem homogenen  $C$ -Feld ein schwaches, modulierte Zusatzfeld überlagert.



eine Apparatur mit 3mal so großer Inhomogenität ein nur etwa 40% größeres Signal am Detektor liefert.

Diese Arbeit wurde im I. Physikalischen Institut der Universität Heidelberg angefertigt. Herrn Professor Dr. H. KOPFERMANN danken wir für sein Interesse an ihr und für die großzügige Förderung. Wir verdanken Herrn Professor Dr. H. FRIEDBURG wertvolle Anregungen in ausführlichen Diskussionen.

**Literatur:** [1] EHRENSTEIN, D. v., G. FRICKE u. P. PIETSCH: Z. Physik **156**, 411 (1959). — [2] RABI, I. I., J. R. ZACHARIAS, S. MILLMAN u. P. KUSCH: Phys. Rev. **53**, 318 (1938). — RABI, I. I., S. MILLMAN, P. KUSCH u. J. R. ZACHARIAS: Phys. Rev. **55**, 526 (1939). — [3] FRICKE, G., H. KOPFERMANN u. S. PENSELIN: Z. Physik **154**, 218 (1959). — [4] PENSELIN, S.: Z. Physik **154**, 231 (1959). — [5] FRICKE, G., H. KOPFERMANN, S. PENSELIN u. K. SCHLÜPMANN: Z. Physik **156**, 416 (1959). — [6] KOPFERMANN, H.: Kernmomente, 2. Aufl. Frankfurt am Main 1956. — [7] RAMSEY, N. F.: Molecular Beams. Oxford 1956. — [8] FRICKE, G.: Z. Physik **141**, 166 (1955). — [9] TAY-

LOR, J. B.: Z. Physik **57**, 242 (1929). — Phys. Rev. **35**, 375 (1930). — [10] SUNDERLAND, R. J.: Diss. University of California 1956. — [11] LEMONICK, A., F. M. PIPKIN u. D. R. HAMILTON: Rev. Sci. Instr. **26**, 1112 (1955). — [12] KING, J. G., u. J. R. ZACHARIAS: Some new applications and techniques of molecular beams. Advances in electronics and electron physics, vol. VIII. New York: Academic Press Inc. 1956. — [13] NIERENBERG, W. A.: The Measurement of the Nuclear Spins etc., Annual Review of Nuclear Science, Palo Alto, California 1957. — [14] ESTERMANN, I.: Recent Research in Molecular Beams. New York and London: Academic Press 1959. — [15] RABI, I. I., J. M. B. KELLOG u. J. R. ZACHARIAS: Phys. Rev. **46**, 157 (1934). — [16] LEW, H.: Doctoral Thesis, Dep. of Phys. MIT 1948. — [17] HOFFMAN McFEE, J.: Doctoral Thesis, Dep. of Phys., Carnegie Inst. of Technology, Pittsburgh, Pa. 1960.

Dipl.-Phys. DIETER VON EHRENSTEIN,  
Heidelberg, I. Physikalisches Institut der Universität  
Dr. GERHARD FRICKE,  
Darmstadt, Institut für Technische Kernphysik der TH  
Dipl.-Phys. PETER PIETSCH †  
verstorben in Heidelberg am 16. Juni 1955  
im Alter von 26 Jahren

## Ein Hohlrohrinterferometer für dielektrische Untersuchungen an verdünnten Lösungen polarer Molekeln

Von FRIEDRICH HUFNAGEL und GERHARD KLAGES

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 15. Dezember 1959)

### A. Einleitung

Beim Studium der dielektrischen Relaxation von Dipolmolekülen in verdünnter Lösung [1] ist es erforderlich, die Absorptionsgröße  $\epsilon''$  bei Werten von etwa  $2 \cdot 10^{-3}$  noch auf mindestens 2% genau zu

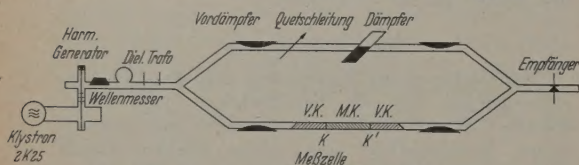


Abb. 1. Blockschaltbild der Meßapparatur

messen. Als weitere Forderung wird in der Praxis stets erhoben, daß möglichst geringe Substanzmengen für die Messungen ausreichen. Reflexionsmethoden [2] verlangen dann allgemein die Messung hoher Stehwellenverhältnisse, wobei sich zahlreiche Fehlerquellen ergeben. Andererseits muß man im Gebiet um 1,5 cm Wellenlänge bei einer Resonanzmethode [3] kleine Flüssigkeitshöhen oder Kolbenverschiebungen mit großer Genauigkeit messen. So bieten sich Durchstrahlungsmethoden [4] an, und es ist das Ziel dieser Arbeit, ihre Anwendbarkeit unter Heranziehung des Interferometer-Prinzips bei schwach absorbierenden Flüssigkeiten zu prüfen. Frühere Autoren benutzten das Mikrowelleninterferometer entweder zur alleinigen  $\epsilon'$ -Bestimmung von Substanzen mit sehr schwacher Dämpfung [5] oder unter Beschränkung auf kleine Probenlängen zur Untersuchung von meist festen Substanzen mit hohem  $\epsilon''$  [6].

### B. Apparatives

Den Prinzipaufbau der Interferometeranordnung zeigt Abb. 1. Der Meßzweig enthält drei Kammern, die unter Ansaugen der Flüssigkeit durch seitlich an Boden und Deckel des Hohlrohres angebrachte Kapillarrohre luftblasenfrei gefüllt werden. Zwischen den beiden Vorkammern (VK), die mit dem unpolaren Lösungsmittel gefüllt sind, befindet sich die Meßkammer (MK) für die Dipollösung. Am Eingang und Ausgang der gesamten Meßzelle herrscht somit stets der gleiche DK-Sprung Luft gegen Lösungsmittel. Zur Reflexionsverminderung sind dort die Stirnflächen der Vorkammern so abgeschrägt, daß die Glimmerfenster ( $50 \mu$  dick) mit den schmalen Seitenwänden des Hohlrohres einen Winkel von etwa  $20^\circ$  bilden. Wegen des geringen DK-Unterschieds zwischen Lösung und Lösungsmittel ist die Reflexion an der nicht abgeschrägten Trennwand zwischen Meß- und Vorkammer zu vernachlässigen. In der Meßzelle sind erst bei Flüssigkeiten mit einer DK oberhalb 2,45 höhere  $H_{n0}$ -Wellentypen existenzfähig; das Auftreten von  $E$ -Wellentypen, das sich unter Umständen als zusätzliche Dämpfung auswirken würde, wird nicht beobachtet.

Als Phasenmeßglied dient eine Quetschleitung. Durch eine Fühlhebelübersetzung im Verhältnis 1:10 wird die Bewegung der einen Hohlrohrhälfte auf eine Meßuhr übertragen, so daß bei Vermeidung des toten Ganges mittels vorgespannter Zugfedern eine Phasenänderung auf  $0,5^\circ$  genau zu messen ist. Sie ist in bekannter Weise mit Kurzschlußschieber und Meßleitung geeicht.



Der Dämpfer enthält eine zur Hälfte mit kolloidaler Schichtlösung beschichtete Pertinaxfolie, die in eine Abzweigung mit etwa 30° Neigung zur Hohlrohrchse eingespannt ist [7]. Das beidseitig geklebte Hohlrohr wird dann stets von einem flächentragenden Stück Folie durchsetzt, und man kann von einer Phasenschiebung des dielektrischen Trägers allein sprechen.

Erreicht wird der Dämpfer, um größere Impedanzänderungen der dazu verwendeten Diode im angelegten Empfänger zu vermeiden, bei kleinen Empfängerströmen (unter 0,5  $\mu$ A) nach einer Substitutionsdiode, bei der nur ein Meßschritt von etwa 1 db der Diodenanzeige benötigt wird. Die Genauigkeit der Eichkurve (0 bis 10 db) kann mit 1,5% angegeben werden. Die unvermeidbare Phasenschiebung der abtastenden Graphitschicht läßt sich sowohl in Resonanzanordnung als auch in Durchgangsschaltung mit höheren Dämpfungswerten (über 5 db) nur mit einer Genauigkeit von höchstens 10° bei einer Gesamtphasenschiebung von etwa 80° messen.

Die beiden Hohlrohrzweige werden durch Y-Glieder [8] zur Interferenzanordnung vereinigt. Um die Verzweigung justieren zu können, ist an der Aufzweigungsstelle der Seitenarme, die mit den Breitseiten zusammengeführt sind, eine Metalllippe eingeführt, so daß man sie in den Hauptarm hinein verschiebt, so daß sich die Verzweigung vom Hauptarm her anpassen, und durch Schwenken ist die Leistungsaufteilung zu ändern, also das ganze Schaltelement zu symmetrieren.

Zum Betrieb des Interferometers wird die erste Harmonische eines Oberwellengenerators, ausgehend von einem Reflexklystron 2 K 25, verwendet. Die relativ leistungsstarke zweite Harmonische ist in einem Wellenmesser als Saugkreis ausgesiebt. Der Generator wird rechteckmoduliert mit 1280 Hz, so daß der Abgleich des Interferometers hinter der Empfangsdiode 1 N 26 mit einem selektiven NF-Verstärker von etwa 30 Hz-Bandbreite beobachtet wird.

## C. Theoretisches

### 1. Y-Verzweigung

Man kann die Y-Verzweigung als passiven 6-Pol betrachten. Die Bezeichnung der Reflexions- und Durchlaufkoeffizienten ist aus Abb. 2 zu entnehmen. Die Verzweigung sei vom Hauptarm aus angepaßt, d.h. die durch ihn einfallende Welle werde nicht reflektiert, sondern vollständig auf die Arme 1 und 2 aufgeteilt. Die Querschnittsebenen in den Armen, auf die sich die Phase der elektrischen Feldstärke bezieht, sollen sich so wählen, daß die Durchlaufkoeffizienten  $d_1$  und  $d_2$  und der Koppelkoeffizient  $k$  reell, also die beiden gleichphasig sind.

Wenn die Verzweigung verlustlos ist, kann man die Bezugsebenen in den Hohlrohren speziell so legen, daß für die Reflexionsfaktoren und den Koppelkoeffizienten die Beziehungen gelten:

$$r_1 = -d_2^2, \quad r_2 = -d_1^2, \quad k = d_1 d_2; \quad d_1^2 + d_2^2 = 1. \quad (1)$$

Im Spezialfall der symmetrischen, vom Hauptarm ausgehenden Y-Verzweigung wird damit:

$$d_1 = d_2 = 1/\sqrt{2}, \quad r_1 = r_2 = -1/2, \quad k = 1/2.$$

### 2. Unsymmetrie des Interferometeraufbaus

In der Interferometerschaltung ergibt sich das Partialwellenbild von Abb. 3. Die Verzweigung am Generator ist darin mit  $Y$ , die vor dem Empfänger mit  $Y'$  bezeichnet. Ihre Übertragungsgrößen sind aus Abb. 2 zu entnehmen, zur Unterscheidung werden sie für  $Y'$  mit einem Strich gekennzeichnet. Die Faktoren  $\ddot{u}$  geben die Phasen- und Amplitudenänderung der Wellenzüge an, wenn sie von einer Bezugsebene  $Y$

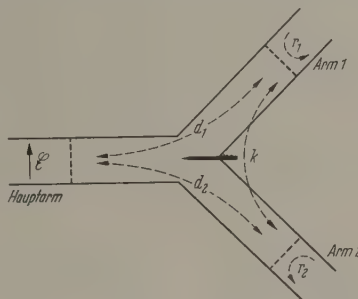


Abb. 2. Y-Verzweigung. Elemente der Strumatrix

zu derjenigen von  $Y'$  (oder umgekehrt) einen Zweig durchlaufen; sie sind die Größen, die durch die Messung miteinander verglichen werden sollen.

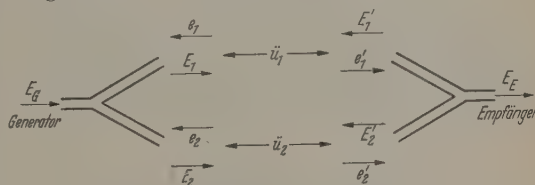


Abb. 3. Partialwellen im Interferometer

Ist das Interferometer abgeglichen, so gilt auf der Empfängerseite für den auslaufenden Hauptarm, in dem sich die Empfangsdiode befindet:

$$E_E = d_1' \cdot e_1' + d_2' \cdot e_2' = 0. \quad (2)$$

Die in die beiden Nebenarmen einlaufenden Wellenzüge  $e_1'$  und  $e_2'$  werden dann vollständig reflektiert, und zwar in den durch (1) festgelegten Bezugsebenen mit einem Phasensprung von 180°.

Drückt man nun in der Auslöschbedingung (2)  $e_1'$  und  $e_2'$  sukzessive durch die vom Generator kommende Welle  $E_G$  aus, so erhält man eine Beziehung zwischen den Übertragungsgrößen in beiden Zweigen  $\ddot{u}_1$  und  $\ddot{u}_2$  und den einzelnen Durchlaufkoeffizienten  $d_i$ :

$$(\ddot{u}_1 - 1/\ddot{u}_1) = -(\ddot{u}_2 - 1/\ddot{u}_2) d_1 d_1' / d_2 d_2'. \quad (3)$$

Die Größe  $\kappa = d_1 d_1' / d_2 d_2'$  ist ein Maß für die Unsymmetrie des ganzen Interferometers. Nur wenn  $\kappa = 1$  ist, wird bei der Nulleinstellung auch  $\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$ . Es ist interessant, dabei den weiteren Verlauf der an der Empfänger-Verzweigung  $Y'$  total reflektierten Wellen zu verfolgen. Für die Partialwelle  $E_1$  (Abb. 3) z.B. erhält man allgemein, wenn das Interferometer nach (2) abgeglichen ist:

$$E_1 = d_1 E_G + r_1 e_1 + k e_2 = d_1 E_G + d_2^2 e_1' (\ddot{u}_1 + \kappa \ddot{u}_2).$$

Die einzelnen Beiträge stammen von der Generatorwelle  $E_G$ , der im Zweig 1 rücklaufenden Welle  $e_1$ , die



am Generator-Y reflektiert wird, und schließlich von der im Zweig 2 rücklaufenden Welle  $e_2$ , die durch dasselbe Y zum Teil übergekoppelt wird. Man sieht sofort, daß für den Spezialfall der völlig symmetrischen Anordnung, bei der  $\kappa=1$  und  $\dot{u}_1 = -\dot{u}_2$  gilt, sich die beiden letztgenannten Wellenzüge durch Interferenz gerade auslöschen. Die rückkehrenden Wellen  $e_1$  und  $e_2$  laufen also dann ungeschwächt zum Generator zurück. — Ist aber die Symmetriebedingung  $\kappa=1$  nicht erfüllt, so wird diese Auslöschung gestört; auch bei abgeglichenem Interferometer werden die vom Empfänger her zurückkehrenden Wellenzüge  $e_1$  und  $e_2$  an der vorderen Verzweigung zum Teil reflektiert, so daß infolge der nun einsetzenden Mehrfachreflexion in der Abgleichbedingung (3) Glieder mit reziproken Übertragungsgrößen auftreten.

Wir wollen nun den Einfluß kleiner Unsymmetrien ( $|1-\kappa^2| \ll 1$ ) auf den Abgleich und das Meßergebnis

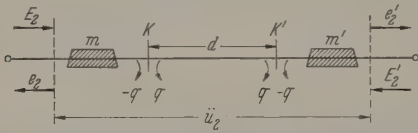


Abb. 4. Meßzweig mit Vordämpfern ( $m$  und  $m'$ ) unter Berücksichtigung der Reflexion ( $q$ ) an der gesamten Meßzelle.  $K$  und  $K'$  bezeichnen die Enden der eigentlichen Meßkammer

untersuchen. Da hierbei die Phase der Übertragungsgrößen eine Rolle spielt, müssen wir sie als  $\dot{u}_i = \rho_i e^{i\varphi_i}$  schreiben und gewinnen damit aus der Abgleichbedingung (3) mit den Abkürzungen für die Dämpfung  $R_i = (\rho_i - 1/\rho_i)^2$  die beiden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \cos^2 \varphi_1 &= \kappa^2 R_2 \cos^2 \varphi_2 \\ (R_1 + 4) \sin^2 \varphi_1 &= (R_2 + 4) \kappa^2 \sin^2 \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für  $R_2$  ergibt sich daraus in der linearen Näherung

$$R_2 = \frac{R_1}{\kappa^2} \left( 1 + \frac{4(1-\kappa^2) \sin^2 \varphi_1}{R_1 + 4 \cos^2 \varphi_1} \right), \quad (5)$$

wobei  $\varphi_1$  von dem speziellen Meßobjekt bzw. von der für den Abgleich notwendigen Einstellung von Dämpfer und Phasenschieber im Vergleichsarm I abhängt. Beträgt diese Phasendifferenz 0 oder  $\pi$ , so wird der Meßfehler der Gesamtdämpfung minimal, und man erhält  $R_2 = R_1/\kappa^2$ ; ist aber die Phase um  $90^\circ$  dagegen verschoben, erreicht er ein Maximum, das sich aber mit steigendem  $R_1$  dem Minimum nähert. Anschaulich hängt dieses Verhalten des Dämpfungsfehlers mit den Mehrfachreflexionen zusammen. Bei großer Dämpfung in der Meßstrecke wird  $\rho_1$  sehr klein und damit  $R_1$  sehr groß, dann sind Mehrfachreflexionen praktisch unterdrückt, und die Phase  $\varphi_1$  hat keinen Einfluß mehr auf den Meßwert der Dämpfung. Man hat dann praktisch  $\rho_2 = \kappa \rho_1$ . — Auch die gemessene Phase  $\varphi_1$  weicht von der des Meßobjekts  $\varphi_2$  ab. Dieser Phasenfehler nimmt aus denselben Gründen wie die Dämpfung mit wachsendem  $R_1$  ab. Er verschwindet außerdem, wenn  $\varphi_1$  gerade  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ \dots$  beträgt.

Bei seiner Verwendung für dielektrische Relaxationsuntersuchungen wird mit dem Interferometer immer die Dämpfungs- und Phasendifferenz von Lösung und Lösungsmittel gemessen, d.h. der Faktor bestimmt, um den  $\dot{u}_i$  dabei wächst. Man beseitigt dann mit den vier Entkopplungsdämpfern (Abb. 1) in den Seitenarmen der Verzweigungen die direkte

Auswirkung der Unsymmetrie in (5), d.h. den Faktor  $1/\kappa^2$ , wenn man bei Füllung der Meßkammer mit dem Lösungsmittel das Interferometer mit ihnen abgleicht. Der Einfluß der Mehrfachreflexionen, der sich im zweiten, von der Phase abhängigen Glied in (5) ausdrückt, wird aber erst durch die Symmetrierung der Verzweigungen ( $\kappa=1$ ) eliminiert. Dieser Fehler verkleinert sich, wie wir sahen, außerdem mit wachsender Gesamtdämpfung, wobei aber bereits bei der Messung mit dem Lösungsmittel ein genügend hoher Wert durch die Vordämpfer einzustellen ist, nicht erst durch die Lösungsabsorption selbst. Man überlegt sich nämlich leicht, daß beim Lösungsmittel die Gesamtdämpfung am geringsten und daher dieser Phaseneinfluß am größten ist.

### 3. Innere Reflexionen

Eine weitere Fehlerquelle bildet die Meßzelle mit ihren Vorkammern, an deren Begrenzungsflächen, trotz ihrer Schrägstellung noch ein kleiner Teil der durchlaufenden Welle reflektiert wird. Um den Einfluß dieser inneren Reflexionen auf den Abgleich zu untersuchen, setzen wir jetzt vereinfachend voraus, daß beide Y-Verzweigungen symmetriert und vom Hauptarm aus angepaßt sind. Im Vergleichszweig vernachlässigen wir die Eigenreflexionen des Dämpfers und der Quetschleitung und fassen die Eigenschaften von geeichtem Dämpfungsglied, Phasenschieber und Vordämpfern in der Übertragungsgröße  $\dot{u}$  zwischen den Bezugsebenen der beiden Y-Verbindungen zusammen.

In Abb. 4 sind in der schematischen Darstellung des Meßzweiges  $m$  und  $m'$  die Dämpfungsfaktoren der Vordämpfer (Übertragungsgröße von der Anfangsebene  $K$  der Meßkammer bis zur Bezugsebene der betreffenden Y),  $q$  die Reflexionsfaktoren an den äußeren Kammerwänden, ebenfalls mit der Phase auf  $K$  bzw.  $K'$  bezogen.  $\Gamma$  sei die Fortpflanzungskonstante der Wellen innerhalb der Meßzelle von der Länge  $d$ . Jede in den Meßarm einlaufende Welle erleidet dann an der Zelle Mehrfachreflexionen, so daß man einen Gesamtreflexionskoeffizienten angeben kann, der auf die Austrittsebene des Y bezogen ist. Da von beiden Seiten Wellen eintreten, muß man mit zwei derartigen Koeffizienten rechnen:

$$r = m^2 Q; \quad r' = m'^2 Q \quad \text{mit} \quad Q = \frac{q[e^{-2\Gamma d} - 1]}{1 - q^2 e^{-2\Gamma d}}, \quad (6)$$

die also von der Kammerfüllung abhängen. Als Auslöschbedingung des Interferometers erhält man dann in der linearen Näherung für genügend große Dämpfung der Zweige:

$$\dot{u}_2 = -\dot{u}_1 (1+r)(1+r'). \quad (7)$$

Dabei sind unter anderem nur die einmal vom Vergleichszweig in den Meßzweig übergekoppelten Partialwellen berücksichtigt, denn alle im Interferometer nach mehrfachen Durchläufen übergekoppelten Wellen können wegen der großen Dämpfung in den Zweigen vernachlässigt werden.

Beim Meßvorgang wird, wie schon betont, die Differenz von zwei Fortpflanzungskonstanten gemessen. Wenn also zum reinen Lösungsmittel  $\Gamma_0$  und zur Lösung  $\Gamma_L$  gehört, so interessieren wir uns nur für  $\Gamma_x = \Gamma_L - \Gamma_0$ . Beim Abgleich ermitteln wir mit



pfer und Phasenschieber im Vergleichsarm ent-  
hend eine Größe  $\gamma_x$ . Aus (7) erhält man dann  
Berücksichtigung von (6) in der ersten Näherung  
leine  $q$ :

$$\gamma_x - \gamma'_x + q [m^2 + m'^2 - q] e^{-2\Gamma_c d} [e^{-2\Gamma_c d} - 1]. \quad (8)$$

bi ist vorausgesetzt, daß  $q$  bei beiden Messungen  
elbe ist. Das gilt für kleine Konzentrationen der  
ng, weil man dann die Reflexion an den Trenn-  
ngen zwischen Vor- und Meßkammer vernach-  
agen und den Reflexionsfaktor  $q$  allein den schrägen  
nen der Vorkammer zuordnen kann. In der er-  
nen Beziehung (8) liefert der zweite Summand die  
ektor für die inneren Reflexionen; er hängt mit  
er letzten Klammer unter anderem vom Unter-  
d der Phasenkonstanten von Lösung und Lö-  
smittel, also von  $\Delta \epsilon'$  ab, das sich mit der Konzen-  
tration ändert. Man hat daher eine „gedämpfte  
dische“ Schwankung der Meßwerte mit der  
lkonzentration zu erwarten. Interessant und  
tig ist es, daß durch geeignete Wahl von  $m$  und  $m'$   
der Bedingung  $m^2 + m'^2 = q$  grundsätzlich eine  
itigung dieses Meßfehlers möglich ist. Dabei  
natürlich eine Amplituden- und Phasenbedingung  
füllen.

#### 4. Bestimmung der DK

Die Fortpflanzungskonstanten von Lösungsmittel  
Lösung im Hohlrohr schreiben sich allgemein:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_L &= \alpha + i\beta_L = \frac{2\pi i}{\lambda} \left[ \epsilon'_L - i\epsilon'' - p \right] \\ \Gamma_0 &= i\beta_0 = \frac{2\pi i}{\lambda} \sqrt{\epsilon_0 - p} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$p = (\lambda/\lambda_g)^2$ , wobei  $\lambda_g$  die Grenzwellenlänge des  
gefüllten Hohlleiters ist. Gemessen werden durch  
prechende Nachbildung im Vergleichsarm die  
senverschiebung  $\delta$  und die Erhöhung  $A$  der  
ungsdämpfung in db, die von der gelösten Dipol-  
tanz verursacht werden. Sie hängen mit den  
nehmen Anteilen der Fortpflanzungskonstanten  
endermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \delta &= (\beta_L - \beta_0) d, \\ 0,2303 A &= A' = 2\alpha d. \end{aligned}$$

et man diese in (9) ein, so ergeben sich nach be-  
nter Zwischenrechnung die beiden Anteile der  
achten komplexen DK:

$$\left. \begin{aligned} &= A' \frac{\lambda}{2\pi d} \left[ \sqrt{\epsilon_0 - p} + \frac{\lambda}{2\pi d} \delta \right] \\ &= \epsilon_L - \epsilon_0 = \delta \frac{\lambda}{\pi d} \sqrt{\epsilon_0 - p} + \\ &\quad + \left( \frac{\lambda}{2\pi d} \cdot \delta \right)^2 - \left( \frac{\lambda}{4\pi d} A' \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

den Fehler von  $\epsilon''$  gehen vornehmlich der Eichfehler  
Dämpfers (1,5%) und die betrachteten Fehler  
ch die Unsymmetrie der ganzen Anordnung und  
inneren Reflexionen in der Meßzelle ein. Durch  
prechendes Vordämpfen läßt sich eine Genauigkeit  
2% erreichen. Der Fehler von  $\Delta \epsilon'$  rührt vorerst  
h hauptsächlich davon her, daß der Phasengang  
Dämpfers nur innerhalb einer Fehlergrenze von

etwa 10% bekannt ist. Deshalb ist mit der bisherigen  
Anordnung zunächst auf die Bestimmung von  $\Delta \epsilon'$   
verzichtet worden, zumal die Absorption allein das  
Relaxationsverhalten der polaren Stoffe bereits aus-  
reichend charakterisiert.

#### D. Meßresultate

Die Arbeitsweise des Interferometers wurde zu-  
nächst an Chlorbenzol-Lösungen in Benzol über-  
prüft. Bei sehr verdünnten Lösungen ist dabei nach

Tabelle. Chlorbenzol in Benzol, 20° C

a Bei willkürlicher Einstellung der Vordämpfer, b nach ge-  
eigneter Justierung

$x \cdot 10^2$ (Mol-%)	a				b		
	$A$ (db)	$\delta$ (grad)	$\epsilon'' \cdot 10^3$	$\frac{\epsilon''}{x}$	$A$	$\delta$	$\frac{\epsilon''}{x}$
0,312	1,08	11,5	0,519	1,66 <sup>5</sup>	1,10	11,5	1,68 <sup>5</sup>
0,557	1,94	20	0,93	1,67	1,95	23	1,68 <sup>5</sup>
0,863	3,00	33	1,44	1,67	3,03	37	1,69
1,046	3,58	40,5	1,76	1,69	3,58	42	1,69
1,46	5,13	52	2,46	1,69	5,13	54,5	1,69
1,723	6,05	60,5	2,92	1,69 <sup>5</sup>	6,03	62	1,69
2,34	8,19	85	3,98	1,70	8,14	85	1,69
2,76	9,62	96,5	4,71	1,70 <sup>5</sup>	9,60	95	1,70
			M.W.	1,68 <sup>5</sup> ± 0,02		M.W.	1,69 ± 0,01

anderen Beobachtungen [9] eine lineare Zunahme von  
 $\epsilon''$  mit der Konzentration zu erwarten, so daß die  
spezifische Absorptionsgröße  $\eta'' = \epsilon''/x$  der verdün-  
nten Lösung ( $x$  Molenbruch) eine Konstante sein muß.

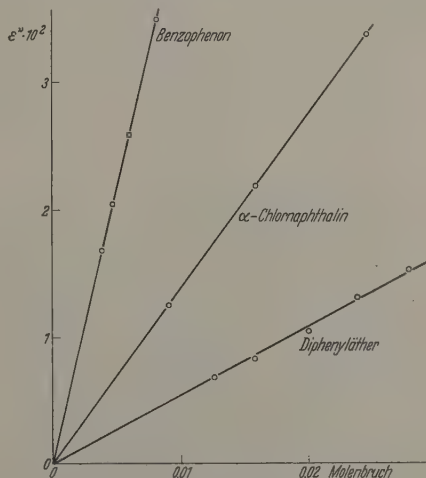


Abb. 5.  $\epsilon''$  in verdünnter Benzollösung (20° C) in Abhängigkeit vom  
Molenbruch

Hiervon kann man ausgehen, wenn man den Einfluß  
der inneren Reflexionen auf die Meßergebnisse nach  
(8) möglichst weitgehend ausschalten will.

In der Tabelle sind die Meßwerte aufgeführt,  
wenn die Vordämpfer nur wenig dämpfen; man be-  
obachtet eine Streuung von etwa 2,5%. Das zur Ver-  
fügung stehende Konzentrationsintervall ist noch zu  
klein, als daß sich eine Periodizität des Fehlergliedes  
in (8) bemerkbar machen könnte, denn die Phasen-



Differenz  $\delta$  steigt nur bis etwa  $100^\circ$ . Danach wird die Dämpfung der Vordämpfer in den Seitenarmen erhöht und so lange im einzelnen variiert, bis die Streuung von  $\varepsilon''$  kleiner als 1% ist. Man findet die entsprechenden Meßwerte in der Tabelle b.

Mit dieser Einstellung des Interferometers ist zur Kontrolle die Konzentrationsabhängigkeit von  $\varepsilon''$  für einige andere gelöste Dipolmoleküle bestimmt.

Die Ergebnisse zeigt Abb. 5, in der die Meßpunkte gut auf Geraden durch den Nullpunkt liegen. Bei Benzophenon und  $\alpha$ -Chlornaphthalin schwankt  $\varepsilon''/x$  um weniger als 0,2%. Für Substanzen, deren Absorptionsmaximum bei wesentlich kürzeren Wellenlängen als der Meßwellenlänge liegt, wird allerdings wegen ihres relativ hohen  $\Delta\varepsilon'$  und der damit verbundenen größeren Phasenschiebung auch die Abweichung von der Linearität stärker und beträgt z. B. bei Diphenyläther etwa 1%. Die Ergebnisse der Messungen am Diphenyläther und ähnlichen Molekülen, die mit dem Interferometer gewonnen wurden, sind bereits kurz diskutiert (10). Eine ausführliche Veröffentlichung aller Meßwerte wird demnächst an anderer Stelle folgen.

Herrn Professor Dr. R. KOLLATH haben wir für die Ermöglichung dieser Arbeit im Physikalischen Institut der Universität Mainz und ihre Förderung sehr zu danken. Ebenso gilt unser Dank der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die sie durch Sachbeihilfen unterstützte.

### Zusammenfassung

Für den Bereich von 1,5 cm Wellenlänge wird ein Meßverfahren für  $\varepsilon''$  beschrieben, das auf dem Interferometerprinzip beruht und nur kurze Meßzeiten benötigt. Die erreichte Genauigkeit ist 2%, bei einer unteren Meßgrenze für  $\varepsilon''$  von  $2 \cdot 10^{-3}$ . Der Einfluß der Unsymmetrie der Anordnung und der Reflexionen an den Begrenzungen der Meßzelle wird theoretisch behandelt. Eichmessungen an verdünnten Chlornaphthalin-, Benzophenon- und  $\alpha$ -Chlornaphthalin-Lösungen zeigen eine lineare Abhängigkeit der Meßwerte von der Konzentration.

**Literatur:** [1] FISCHER, E., u. F. C. FRANK: Phys. Z. 4 345 (1939). — FISCHER, E., u. G. KLAGES: Phys. Z. 40, 72 (1939). — HASE, H.: Z. Naturforsch. 8a, 698 (1953). — [2] ROBERTS, S., and A. V. HIPPEL: J. Appl. Phys. 17, 61 (1946). — [3] BRUMA, M.: C. R. Acad. Sci., Paris 232, 4, 219 (1951). — [4] MONTGOMERY, C. G.: Technique of Microwave Measurements, S. 561 ff. — [5] REDHEFFER, R. M., and E. D. WINKLER: Rad. Bull. 15, 483 (1945). — [6] HARRIS, F. E., and C. T. O'KONSKI: Rev. Sci. Instrum. 26, 482 (1955). — [7] BUSECK, H., u. G. KLAGES: Arch. elektr. Übertragung 12, 163 (1958). — [8] RAGAN, G.: Microwave Transmission Circuits, S. 524. New York 1948. — [9] CRIPWELL, F. J., and G. B. M. SUTHERLAND: Trans. Faraday Soc. A 42, 12 (1946). — WHIFFEN, H. D., and H. W. THOMSON: Trans. Faraday Soc. A 42, 118 (1946). — WHIFFEN, H. D.: Trans. Faraday Soc. A 42, 130 (1946). — [10] KLAGES, G., F. HUFNAGEL, H. KRAMER: Arch. Sci. Genève fasc. spéc. 12, 14 (1959).

Dr. FRIEDRICH HUFNAGEL  
und Professor Dr. GERHARD KLAGES  
Physikalisches Institut der Universität Mainz

## Inhomogene Wellen im Beugungsnahfeld von verlustlosen dielektrischen Kreiszylindern

Von VOLKMAR MÜLLER

Mit 12 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. November 1959)

### A. Einleitung

Die theoretische Behandlung der Beugung an kreiszylindrischen Objekten läßt sich durch Integration der Maxwell'schen Gleichungen, ebenso wie bei der Kugel und dem Ellipsoid, streng durchführen. Eine Zusammenstellung zahlreicher Veröffentlichungen hierüber findet man bis 1920 bei SPOHN [1] und von 1943 bis 1952 bei BOUWKAMP [2]. Beim Metallzylinder mit unendlich hoher Leitfähigkeit, ebenfalls noch beim verlustlosen homogen dielektrischen Vollzylinder [3] bis [7] und beim Metallzylinder, der mit homogenem Dielektrikum umgeben ist [8], [9], [10], gestaltet sich die Lösung einfach. Für dielektrische Hohlzylinder [11] ist sie schon sehr viel komplizierter und führt in der numerischen Auswertung trotz Näherungslösungen noch zu aufwendigen Rechnungen.

Umgeht man die Rechnung, weil die theoretische Lösung und auch die numerische Auswertung schwierig bzw. gar nicht möglich sind, und bestimmt das Beugungsfeld<sup>1</sup> experimentell [8], [12] bis [15], so besteht vielfach der Wunsch, den Feldverlauf wenigstens

qualitativ deuten zu können. Bei verlustlosen dielektrischen Voll- und Halbzylindern mit Durchmessern von der Größenordnung der Wellenlänge ist dies in den Arbeiten [14] und [15] mit Hilfe der geometrischen Optik versucht worden. Damit gelingt nicht die Erklärung der Feinstruktur des Beugungsfeldes. Um diese zu deuten oder sogar vorherzusagen, müssen die Erscheinungen der Beugung und Interferenz<sup>2</sup> mitberücksichtigt werden. Das erfolgt in der vorliegenden Arbeit an Hand von Meßergebnissen, die an dielektrischen Voll- und Hohlzylindern gewonnen wurden.

### B. Meßanordnung

Das Beugungsfeld der zu untersuchenden Kreiszylinder wurde in einem Flachraum<sup>3</sup> [10], [16], [17] [18] gemessen. Der Flachraum besteht aus zwei parallelen Metallplatten, zwischen denen die Wellen

<sup>1</sup> Mit Beugungsfeld wird allgemein ein durch begrenzte Hindernisse in der Ausbreitung gestörtes Wellenfeld bezeichnet.

<sup>2</sup> Die Unterscheidung zwischen Beugung, der Abweichung vom geometrisch-optischen Strahlenverlauf und Interferenz der Überlagerung verschiedener Wellenzüge, ist besonders für qualitative Untersuchungen nützlich und wird daher auch hier übernommen.

<sup>3</sup> In der angelsächsischen Terminologie: „parallel-plate transmission line“ oder „parallel-plate region“.



führt wird. Die Reflexion an den Kanten verhindern angebrachte Absorber. Dadurch ist der Fall der Ausbreitung zwischen unendlich großen Platten realisiert. Wählt man den Abstand der Metallplatten größer als die halbe Wellenlänge des eingespeisten Strahls, so ist als einzige Wellenausbreitungsform die transversal-elektrisch-magnetische Welle (TEM) möglich. Eventuell angeregte Hohlleitermoden erleiden eine Blinddämpfung. Der elektrische Feldstärkevektor der TEM-Welle steht wie die Achse der Zylinderstücke senkrecht auf den Metallplatten. Die Endflächen der Zylinder liegen an den Platten an. In diesem Flachraum meßbare Beugungsfeld eines Zylinderstückes entspricht wegen der Spiegelwirkung dem Beugungsfeld eines unendlich langen Zylinders im Feld einer unendlich ausgedehnten Welle. Der Gesamtaufbau der Meßanordnung geht aus Abb. 1 hervor. Die Einspeisung der Mikrowellenenergie in den Flachraum erfolgt durch einen Trichter.

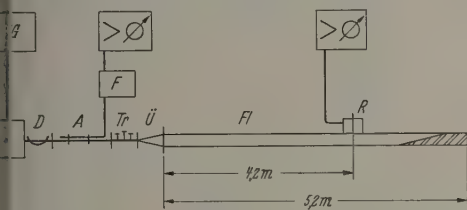


Abb. 1. Schematischer Aufbau der Meßanordnung.  $N$  elektronisch stabilisiertes Netzgerät;  $K$  Reflexklystron Varian;  $D$  Dämpfungsglied;  $A$  20 dB-Richtkoppler;  $F$  Frequenzmesser;  $Tr$  Trichterschraubentransformator;  $Ü$  Übergangsglied [für den Übergang von Zylinderhöhe (10,16 mm) auf die Flachraumhöhe (15 mm)];  $Fl$  Flachraum (5,2 m lang, 1 m breit, 1,5 cm hoch);  $R$  Resonanzsonde [19]

Absorber längs der Plattenkanten dienen Rotationsbretter, die nach innen hin keilförmig zulaufen. Der Reflexionsfaktor liegt für senkrechten Einfall bei 1,5%. Die 3 mm dicken Aluminiumplatten sind waagrecht angeordnet. Ein Durchhängen der Platten Absorbern aufliegenden oberen Platte ist durch geflechte „Brückenkonstruktionen“ verhindert.

Die Messungen wurden bei feststehender Sonde durchgeführt, das Meßobjekt wurde verschoben. Der Bericht auf die Führung der Sonde durch einen Trichter vereinfachte den Aufbau der Apparatur. Zusätzlich, auch ist das Feld dadurch ungestört. Die Beugungsfelder der zu untersuchenden Objekte werden für einfallende ebene Wellen bestimmt werden. Der Trichter strahlt aber eine Zylinderwelle ab, die bei genügend großer Entfernung in einem vorgegebenen Bereich als hinreichend eben angesehen werden kann. Bei dem hier gewählten Abstand zwischen Trichter und Objekt von 4,2 m errechnet sich im Umkreis von 10 cm Radius um das Objekt eine maximale Phasendifferenz zwischen Zylinderwelle und ebener Welle von  $27^\circ$ , eine maximale Amplitudenabweichung — bedingt durch den Abfall — von 1,2%. Wie genau diese Meßanordnung das Beugungsfeld liefert, das bei Anregung mit ebenen Wellen zu erwarten ist, zeigt der Vergleich der berechneten [12], [18] und mit dieser Anordnung gemessenen Feldverteilungen für Metallzylinder. Für die Beschreibung der Meßergebnisse wird das Koordinatensystem der Abb. 2 zugrunde gelegt. Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle ist die positive  $x$ -Richtung. Als Zylinderachse ist die  $z$ -Achse gewählt. Das Feld der Metallzylinder wurde

längs der negativen und positiven  $x$ -Achse untersucht (s. Abb. 3a und 3b) und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung in zwei verschiedenen Abständen

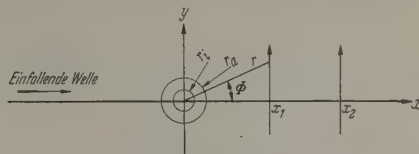


Abb. 2. Verwendetes Koordinatensystem zur Beschreibung der Meßergebnisse

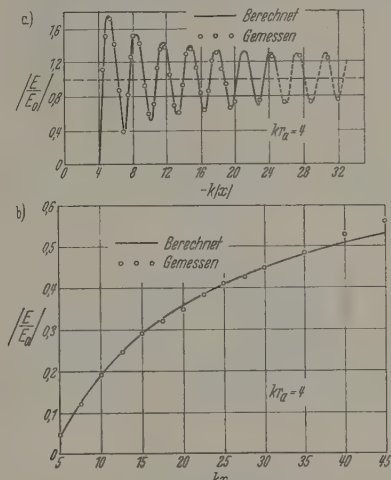


Abb. 3. a Vergleich von berechnetem [18] und gemessenem Feldstärkeverlauf vor einem Metallzylinder ( $\varphi = 180^\circ$ ); b Vergleich von berechnetem [18] und gemessenem Feldstärkeverlauf hinter einem Metallzylinder ( $\varphi = 0^\circ$ )

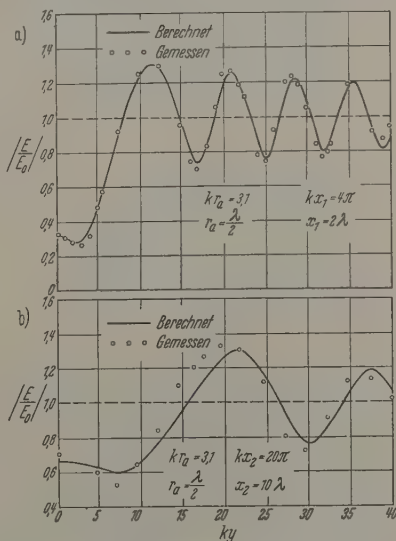


Abb. 4a u. b. Vergleich von berechnetem [12] und gemessenem Feldstärkeverlauf hinter einem Metallzylinder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle für zwei verschiedene Abstände

( $x_1$  und  $x_2$ ) hinter dem Zylinder (s. Abb. 4a und 4b). In den Abb. 3 und 4 ist auf der Abszisse  $kx$  bzw.  $ky$  aufgetragen ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ). Die Meßpunkte liegen in allen Fällen genügend genau (maximaler Fehler: 5%) auf

den theoretischen Kurven. Bei Abb. 4b ist das erwartungsgemäß nicht ganz der Fall, denn hier ist außerhalb des 10 cm-Umkreises gemessen worden.

### C. Das Beugungsfeld von Metallzylindern und verlustlosen dielektrischen Voll- und Hohlzylindern mit gleichen Außenradien

#### I. Geometrisches Verfahren zur qualitativen Darstellung der Feldverteilung

Qualitative Aussagen über den Aufbau eines Beugungsfeldes kann man durch Anwendung des Huygens-Fresnelschen Elementarwellenverfahrens erhalten. Für einen dielektrischen Vollzylinder (Plexiglas,  $r=20$  mm) — das Verhältnis Außendurchmesser zur Wellenlänge beträgt 1,25 — ist dieses

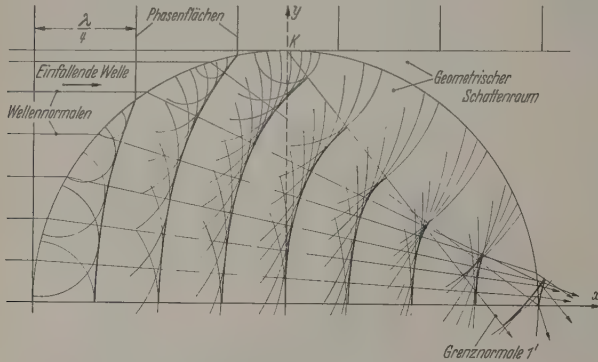


Abb. 5. Huygenssche Elementarwellenkonstruktion für eine auf einen dielektrischen Vollzylinder einfallende ebene Welle

Verfahren in Abb. 5 durchgeführt. Die gezeichneten Phaseflächen der einfallenden Welle haben den Abstand  $\lambda/4$ . Im Bereich  $x < 0$  gehen diese Flächen an der Grenzfläche des Zylinders stetig in die Einhüllende der Huygensschen Elementarwellen über. Für  $x > 0$

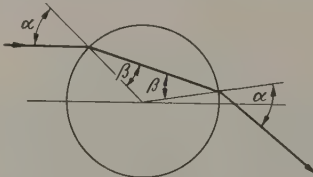


Abb. 6. Der Eintrittswinkel der Wellennormalen ist gleich dem Austrittswinkel

sind die Phaseflächen der einfallenden und der gebrochenen Welle durch den über beide Medien erstreckten geometrischen Schattenraum getrennt; doch dringen infolge der Beugung sowohl die einfallende als auch die gebrochene Welle zu einem geringen Teil in dieses Schattengebiet ein. Außerhalb dieses Schattenraumes lassen sich zu den Phaseflächen die Wellennormalen angeben, die aus Gründen der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke und der Normalkomponente der Verschiebungsdichte dem Reflexions- und Brechungsgesetz gehorchen.

Die Phaseflächen kann man einfacher dadurch erhalten, daß man zuerst die Wellennormalen konstruiert. Auf ihnen trägt man unter Berücksichtigung der optischen Länge eine Phasenskala ab und verbind-

et dann die Orte gleicher Phase durch die Phaseflächen.

Wie in der Linsenoptik zeigt sich in Abb. 5 der sphärische Fehler: Die Wellennormalen schneiden sich nicht alle in einer zur Zylinderachse parallelen Linie, der Brennpunktlinie, sondern im Zwischenraum zweier symmetrisch zur  $x-z$ -Ebene liegender Beugungsflächen, die man *Kaustik* nennt. Sie ist die Einhüllende der Wellennormalen. Der sphärische Fehler tritt in der Abb. 5 außerdem noch durch den nicht glatten Verlauf der Phaseflächen im Bereich  $x > 0$  in Erscheinung.

Die Bündelung der Wellennormalen im Gebiet der *Kaustik* führt zu einer erhöhten Energiedichte; es findet in diesem Gebiet eine nahezu gleichphasige Addition (in bezug auf die elektrische und magnetische Feldstärke) der einzelnen Wellenanteile statt. Diese Gleichphasigkeit ist auch der Grund dafür, daß die geometrische Optik noch in diesem Bereich gültige Aussagen liefert.

Bei den letzten Betrachtungen konnte die Wellenausbreitung im geometrischen Schattenraum außer acht gelassen werden, da dieser Wellenanteil im Bereich der *Kaustik* keinen wesentlichen Beitrag liefert. Man muß jedoch damit rechnen, daß dieser Anteil in Erscheinung tritt, wenn er nicht — wie im *Kaustik*-Bereich — von intensiveren Effekten überdeckt wird. Die durch Beugung in den geometrischen Schattenraum gelangende Welle wird außerhalb und innerhalb des Zylinders getrennt betrachtet. Außerhalb des Zylinders wird sie die Beugung als „heller Streifen hinter einem Schirm“ — entsprechend dem „Poissonschen Fleck“ hinter einer Kreisscheibe — bemerkbar machen. Die Rolle, die die Beugung im Innern des Zylinders spielt, ist Gegenstand der folgenden Betrachtung.

Solange man den Ausbreitungsvorgang im Zylinder allein durch die Wellennormalen beschreibt, verläßt jede Normale den Zylinder unter dem gleichen Winkel, unter dem sie einfiel (Abb. 6). Unter dieser Voraussetzung kann keine Totalreflexion auftreten. Die im Schattenbereich im Innern des Zylinders auftretenden Beugungswellen können jedoch an der Grenzfläche Totalreflexion erleiden. Dabei tritt im Außenraum eine quergedämpfte Welle (inhomogene Welle, Oberflächenwelle) auf, die sich längs der Oberfläche ausbreitet.

Die Beugung läßt sich in einem geometrischen Konstruktionsverfahren auf einfache Weise nicht berücksichtigen. Sie wird daher im folgenden bei der Konstruktion außer acht gelassen, ihr Beitrag zum Aufbau des Feldes wird jeweils gesondert untersucht. Es stellt sich dabei heraus, daß diese getrennte Betrachtungsweise Ergebnisse liefert, die gut mit der gemessenen Feldverteilung übereinstimmen.

#### II. Anwendung des geometrischen Darstellungsverfahrens

a) Das Beugungsfeld des Metallzylinders ( $r=20$  mm). Zunächst soll das im letzten Kapitel beschriebene Verfahren am Beispiel des Metallzylinders von  $r=20$  mm geprüft werden. Die einfallende Welle ist charakterisiert durch ihre Phaseflächen, wird an der Oberfläche „reflektiert“. Berücksichtigt man den be-



Reflexion eintretenden Phasensprung der  
rischen Feldstärke um  $\pi$ , so ergibt sich die  
7. Aus der Überlagerung der einfallenden  
e und der reflektierten erhält man die stark  
bezogenen Kurven, die jeweils den zeitunab-  
higen Ort angeben, an dem durch Überlage-  
e eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung der  
Feldstärke eintritt. Infolge der divergierenden  
Breitung der reflektierten Welle nimmt mit  
sender Entfernung diese Vergrößerung bzw.  
einerung der Feldstärke auf den Inter-  
ferenzkurven ab. Die Meßergebnisse sind in  
n Polardiagramm in Abb. 8a angegeben.  
besseren Vergleich sind in Abb. 7 auf den  
gezeichneten Meßkreisen die geme-  
en Orte der Extremalwerte mit eingezeich-  
t. Man findet eine recht gute Übereinstim-  
g. Über die durch Beugung bedingte  
verteilung im geometrischen Schattenraum  
die Abb. 7 natürlich nichts aus. Den  
arten „hellen Streifen“ erkennt man  
den gemessenen Kurven in Abb. 8a deutlich in  
zur  $x$ -Achse hin wieder ansteigenden Feldstärke.  
Da der Abstand der Meßkreise etwa  $\lambda/2$  beträgt,  
ie Welligkeit vor dem Zylinder (auf der negativen  
hse) hier nicht zu erkennen, da ihre Periode auch  
t. Die längs der  $y$ -Achse auftretende Welligkeit mit  
elter Periode tritt deutlicher hervor. Diese Periode  
an man natürlich auch der Abb. 7 entnehmen.

c) Das Beugungsfeld des dielektrischen Vollzylinders  
(20 mm). Betrachtet man anstelle des Metall-  
nders dielektrische Zylinder und sieht zunächst  
der Beugung ab, so wird die Feldverteilung nicht  
durch Überlagerung der einfallenden und der  
er Grenzfläche reflektierten Welle bestimmt. Es  
men beim Vollzylinder neben der durchgehenden  
e noch weniger starke Anteile hinzu, die durch  
erfachreflexionen im Innern entstehen. Beim Hohl-  
nder gibt die zweite Grenzfläche noch zu weiteren  
exionen und Brechungen Anlaß. Hinzu kommen  
die oben erwähnten inhomogenen Wellen. Über  
Intensität geben die Messungen Aufschluß  
b. 8b, c, d).

Eine qualitative Darstellung des Beugungsfeldes  
dielektrischen Vollzylinder mit  $r = 20$  mm gewinnt  
durch Überlagerung der einfallenden Welle ( $E$ ),  
reflektierten ( $R$ ), der durchgehenden ( $D$ ) und der  
mogenen Welle ( $J$ ) (Abb. 9). (Die Reflexion ist  
beim Metallzylinder mit einem Phasensprung un-  
verbunden.) Mehrfachreflexionen brauchen — wie  
gezeigt hat — nicht berücksichtigt zu werden.  
die Amplituden der Teilwellen  $E$ ,  $R$ ,  $D$ ,  $J$  nicht  
annt sind, ist eine Gesamtüberlagerung nicht mög-  
lich. Deshalb werden bei dieser Konstruktion einmal  
+  $R''$  — wie schon beim Metallzylinder — und  
n noch „ $E + D''$ “ und „ $E + J''$ “ überlagert. Da-  
ch ist das Interferenzfeld qualitativ völlig be-  
immt, so daß sich Überlagerungen wie „ $R + D''$ “,  
+  $J''$ “ erübrigen. Welche Aussagen diese Konstruk-  
tion liefert, sei am folgenden Beispiel gezeigt: Ein  
ch eine „ $E + R''$ “-Maximumkurve dargestellter  
grücken“ wird am Ort A von einer „ $E + D''$ “-  
imumskurve und am Ort B von einer „ $E + D''$ “-  
imumskurve geschnitten. Das bedeutet nun, daß  
„ $E + R''$ “-Bergrücken im Punkt A erhöht und im  
kt B erniedrigt wird.

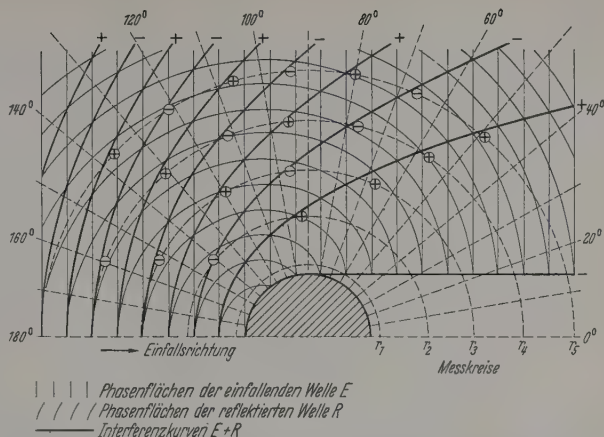


Abb. 7. Interferenzfeld einer auf einen Metallzylinder einfallenden ebenen Welle. (Die mit + bezeichneten Interferenzkurven geben die Orte gleichphasiger Überlagerung, die mit - bezeichneten die Orte gegenphasiger Überlagerung an. Die Zeichen  $\oplus$  und  $\ominus$  auf den Meßkreisen zeigen die Orte der gemessenen Extrema)

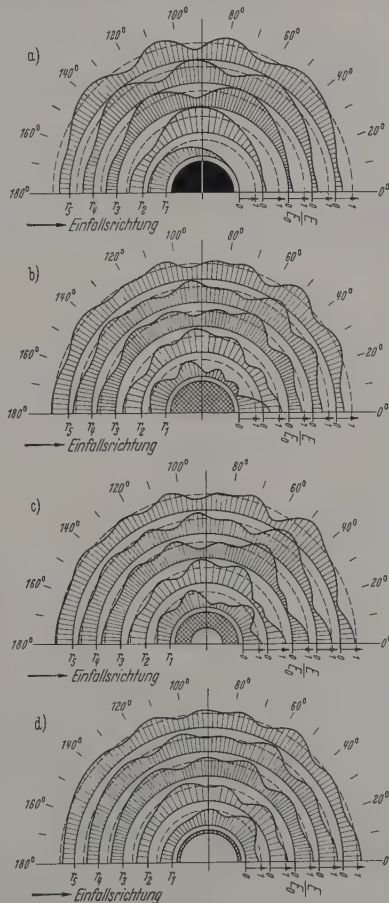


Abb. 8. a) Beugungsfeld des Metallzylinders  $r = 20$  mm ( $r_1$  bis  $r_5$  sind die Radien der Meßkreise); b) Beugungsfeld des dielektrischen Vollzylinders ( $r = 20$  mm); c) Beugungsfeld des dielektrischen Hohlzylinders mit  $r_a = 20$  mm,  $r_i = 10$  mm; d) Beugungsfeld des dielektrischen Hohlzylinders mit  $r_a = 20$  mm,  $r_i = 18$  mm

Bevor das Interferenzfeld des dielektrischen Vollzylinders konstruiert werden kann, muß erst noch näher auf die inhomogene Welle eingegangen werden:

Wie bereits erwähnt, kann man die inhomogene Welle durch Beugungsanteile der eingedrungenen Welle entstanden denken, die Totalreflexion erleiden. Diese Beugungsanteile stammen nicht nur von dem in Abb. 10 bei  $K_1$  streifend einfallenden Wellenteil, der durch die Wellennormale  $1'$  bezeichnet ist, sondern auch noch von den Teilen, die bei  $K_2$  und  $K_3$  steiler

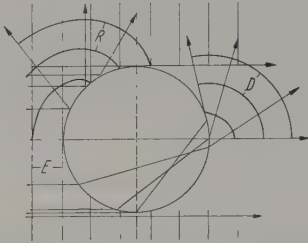


Abb. 9. Aufspaltung der einfallenden Welle  $E$  in die reflektierte Welle  $R$  und die durchgehende Welle  $D$  (die inhomogene Welle ist nicht gezeichnet)

auf den Zylinder fallen. Ihr Beitrag zur Beugungsercheinung sinkt mit dem Abstand der Ausgangspunkte  $K_2$ ,  $K_3$  der Elementarwellen von der „beugenden Kante“  $K_1$ . Außerdem treten zur Bildung der inhomogenen Welle noch Beugungsanteile hinzu, die

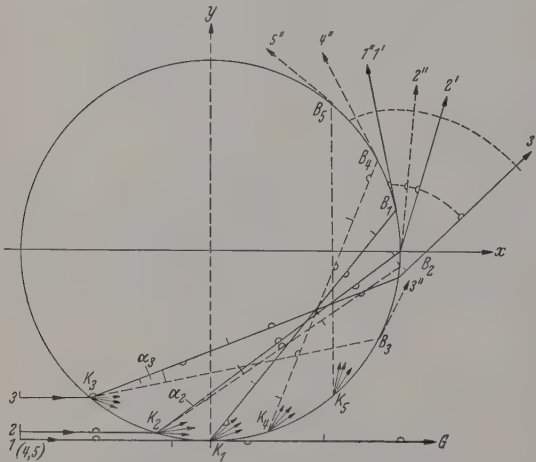


Abb. 10. Entstehung der inhomogenen Welle durch Beugungswellen im Innern des Zylinders

von den Punkten  $K_4$ ,  $K_5$  ausgehen. Sie haben ihren Ursprung in dem durch Beugung der einfallenden Welle  $E$  über die Schattengrenze  $K_1-G$  gelangenden Wellenteil, der nach streifendem Einfall teilweise in den Zylinder eindringt. Der Beitrag zur inhomogenen Welle sinkt ebenfalls mit dem Abstand der Punkte  $K_4$ ,  $K_5$  von  $K_1$ . Die oberhalb des Grenzwinkels der Totalreflexion  $\varphi_T$  auf die Grenzfläche auftreffenden Beugungsanteile sind durch fächerartig angeordnete Pfeile in Abb. 10 symbolisiert. Die gestrichelten Geraden, die die Fächer einseitig begrenzen, geben die Ausbreitungsrichtung der Beugungswellen an, die unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion bei  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  und  $B_5$  auftreten. Die Beugungsanteile zwischen den Wellennormalen und den gestrichelten Geraden (Winkel  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ) werden nicht totalreflektiert und geben keinen Beitrag zur inhomogenen Welle. Für den Fall, daß eine ebene Welle auf eine ebene

Grenzfläche zum optisch dünneren Medium unter einem Winkel größer als  $\varphi_T$  auftrifft, wird die Dämpfung der Feldstärke der inhomogenen Welle senkrecht zur Grenzfläche (Quer-dämpfung) angegeben durch

den Faktor  $e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n_2 \sqrt{\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_T}}$  ( $\varphi$  Abstand senkrecht zur Grenzfläche im optisch dünneren Medium dessen Brechungsindex 1 ist;  $\lambda$  Freifeldwellenlänge  $\varphi_1$  Einfallswinkel im optisch dichteren Medium mit dem Brechungsindex  $n_1$ )<sup>1</sup>. Es wächst also die Dämpfung mit dem Einfallswinkel. Ein Zahlenbeispiel möge das veranschaulichen: Der Grenzwinkel der Totalreflexion ist hier  $\varphi_T \approx 38,7^\circ$  für  $n_1 = 1,6$ . Bei einem Einfallswinkel von  $38,8^\circ$  ( $40^\circ$ ) ist die an der Grenzfläche herrschende Feldstärke nach etwa 3,1 (0,3) Wellenlängen auf  $1/e$  abgefallen, auf  $1/10$  nach etwa 8,3 (0,7) Wellenlängen. Unter der Annahme, daß diese Aussagen auch für eine näherungsweise Betrachtung der vorliegenden Verhältnisse herangezogen werden können, genügt es, für die qualitativen Untersuchungen der inhomogenen Welle die gebeugte Welle nur in einem Winkelbereich von etwa  $1^\circ$  – vom Grenzwinkel der Totalreflexion aus gemessen – zu betrachten; d.h., von den gezeichneten Fächern wird nur ein schmaler Sektor, angrenzend an die gestrichelten Geraden, berücksichtigt.

Außerdem lassen sich nach der Abb. 10 noch Aussagen über die Phasenlage der inhomogenen Wellen machen: Betrachtet man dazu eine Welle, die auf die Grenzfläche vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium trifft, und vergrößert stetig den Einfallswinkel, so geht dabei im zweiten Medium die Phase der homogenen Welle stetig in die der inhomogenen über. Das heißt hier, daß längs der Grenznormalen  $1'$  (Abb. 10) die Phasen der durchgehenden Welle  $D$  und der inhomogenen Welle zusammenfallen müssen. Nur die im Zylinder unter einem Einfallswinkel wenig größer als  $\varphi_T$  auf die Grenzfläche treffenden Wellen erzeugen an der Oberfläche die hier aus schließlich betrachteten schwach quer gedämpften Wellen. Ihre Spurwellenlänge (längs der gekrümmten Oberfläche) ist nur geringfügig gegenüber der Freifeldwellenlänge verkleinert. Die Phasenflächen der inhomogenen Welle erhält man nun in genügender Näherung, wenn man die Spurwellenlänge der Freifeldwellenlänge gleichsetzt und die Grenznormale auf der Orte bestimmter optischer Weglänge (etwa in  $\lambda/4$  Abstand) markiert sind, um den Zylinder „wickelt“. (Diese diskreten Orte sind in Abb. 10 durch verschiedene Phasensymbole gekennzeichnet. Die Kurven, die beim „Abwickeln“ von den markierten Orten beschrieben werden, können dann zwischen der Oberfläche und der Grenznormalen  $1'$  in guter Näherung als die (in die Papierebene projizierten) Phasenflächen angesehen werden. Die bei  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  und  $B_5$  angeregten inhomogenen Wellen verstärken sich durch gleichphasige Addition, wie aus der Lage der Phasensymbole in Abb. 10 ersichtlich ist. Durch Überlagerung der einfallenden Welle  $E$  mit den so erhaltenen Phasenflächen der inhomogenen Welle sind in Abb. 11 die resultierenden Interferenzkurven gewonnen. Man kann sie ansehen als die Fortsetzung der Interferenzkurven „ $E + D$ “, die definitionsgemäß an der Grenznormalen  $1'$  enden

<sup>1</sup> Theoretische Behandlung der inhomogenen Welle z.B. von CL. SCHAEFER [20], SCHAEFER/GROSS [21] und PICRET [22].



Ihre Konstruktion, die dem vom Metallzylinder bekannten Verfahren entspricht, soll hier nicht eingegangen werden. Ihr Verlauf läßt genau Einfluß der inhomogenen Welle auf das Beugungserkennen. Das wird im folgenden Beispiel gezeigt. In dem betrachteten Gebiet zwischen Ober- und Grenznormalen ist das Feld allein durch  $E$ ,  $R$  und  $J$  bestimmt, d.h., zu den vom Metallzylinder her bekannten Interferenzkurven  $E+R$  kommen hier nur die „ $E+J$ “-Kurven hinzu. Die „ $E+J$ “-Minimumkurve, die den Kreis  $r_5$  bei  $80^\circ$  schneidet, sei im einzelnen verfolgt: Durch Überlagerung von  $E$  und  $R$  ergibt sich beim Metallzylinder (Abb. 8a) auf  $r_5$  bei  $80^\circ$  ein Maximum. Beim dielektrischen Zylinder (Abb. 8b) ist dem entsprechenden Maximum bei  $80^\circ$  ein Minimum überlagert. Auf  $r_4$  beim Metallzylinder zwischen  $85^\circ$  und  $114^\circ$  Maximum, beim dielektrischen Zylinder ist die rechte Flanke des entsprechenden Maximums senkt. Auf  $r_3$  fallen die Minima von  $E+R$  und  $E+J$  bei  $95^\circ$  zusammen. Auf  $r_2$  erkennt man deutlich, daß sich der Flanke des  $94^\circ$ -Maximums beim Metallzylinder zwischen  $107^\circ$  und  $110^\circ$  ein Minimum beim dielektrischen Zylinder überlagert. Beim Metallzylinder ist in der Umgebung von  $130^\circ$  auf  $r_1$  der Feldstärkeverlauf steil, während sich beim dielektrischen Zylinder dort ein Minimum zeigt.

Es ist nun noch der Verlauf der inhomogenen Welle in den Abbildungen rechts von der Grenznormalen  $l'$  zu untersuchen. Durch Konstruktion läßt sich im ganzen Bereich nicht ermitteln. Von der Grenznormalen bis etwa  $\varphi = 45^\circ$  geben die „Abstrahlkurven“ der auf der Grenznormalen abgetragenen Phasensymbole den Verlauf der inhomogenen Welle noch genügend genau an. Er unterscheidet sich hier von dem der durchgehenden Welle  $D$  kaum. Es fallen auch die Interferenzkurven  $E+D$  und  $E+J$  fast zusammen. Im übrigen Bereich ist der berechnete Verlauf der  $E+J$ -Interferenzkurven und Phasenflächen der inhomogenen Welle den Meßergebnissen entnommen.

Die den Zylinder umlaufenden inhomogenen Wellen lassen sich bei dem gemessenen Beugungsfeld des dielektrischen Vollzylinders bis etwa  $\varphi = 130^\circ$  auf  $r_1$  verfolgen, wenn man die Abb. 8a und 8b vergleicht. Eine Überlagerung der beiden inhomogenen Wellen vor dem Zylinder kann nicht festgestellt werden.

b) Das Beugungsfeld der dielektrischen Hohlzylinder ( $r_a = 20$  mm). Zur qualitativen Darstellung des Beugungsfeldes bei dielektrischen Hohlzylindern genügt folgende Teilwellen zu betrachten: Die einfallende Welle  $E$ , die an der Außenfläche reflektierte Welle  $R$ , die in den Zylinder eingedrungene Welle, die hier in zwei Teile zerfällt: der Teil  $D$ , der die Innenfläche trifft, der an der Innenfläche totalreflektierte Teil  $DR$  und der die Innenfläche durchsetzende Teil  $DD$ , und außerdem noch die inhomogene Welle  $J$ . Vergleicht man das Beugungsfeld der dielektrischen Hohlzylinder mit dem Außenradius  $r_a = 20$  mm und Innenradien kleiner als  $r_i = 12$  mm mit dem Feld der Vollzylinder mit gleichem Durchmesser, so finden sich keine starken qualitativen Unterschiede, wie dem

Beispiel des Hohlzylinders mit dem Innenradius  $r_i = 10$  mm in Abb. 8c zu entnehmen ist. Der Grund dafür liegt darin, daß das Beugungsnahfeld beim Voll- und Hohlzylinder neben der einfallenden ( $E$ ) und der reflektierten ( $R$ ) hauptsächlich durch die inhomogene Welle ( $J$ ) bestimmt ist und diese bis zu

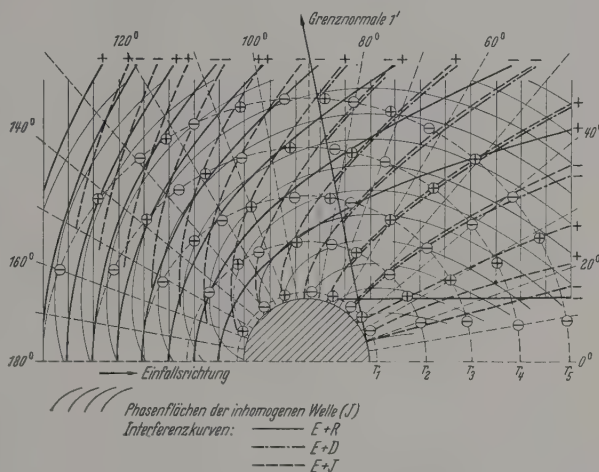


Abb. 11. Interferenzfeld einer auf einen dielektrischen Vollzylinder einfallenden ebenen Welle [Überlagerung der einfallenden ( $E$ ), der reflektierten ( $R$ ), der durchgehenden ( $D$ ) und der inhomogenen Welle ( $J$ )]

einem bestimmten Radius der inneren Grenzfläche unverändert bleibt. Lediglich die Wellenteile  $D$ ,  $DR$ ,  $DD$  erleiden durch die Innenfläche Veränderungen,

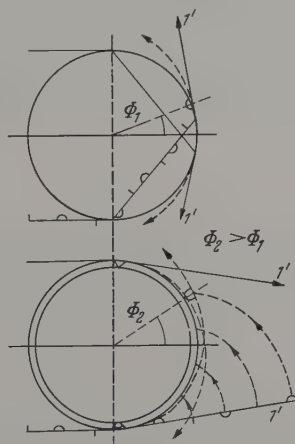


Abb. 12. Zur Phasenverschiebung der inhomogenen Welle

die sich auch einzeln im Feldverlauf erkennen lassen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Beschrieben seien hier noch kurz Beobachtungen, die man als Beweis für den Entstehungsvorgang der inhomogenen Welle ansehen kann, wie er im vorhergehenden Kapitel anhand Abb. 10 erklärt worden ist. Dort wurde der Verlauf der Wellenteile innerhalb des Zylinders gezeigt, die für die Anregung der inhomogenen Welle verantwortlich sind. Solange die dort beschriebenen „schmalen Fächer“ nicht auf die innere Grenzfläche treffen, wird die entstehende inhomogene Welle nicht beeinflusst. Das ist — wie

schon bemerkt — durch die Meßergebnisse bestätigt. Bei größeren Innenradien findet an der inneren Grenzfläche Reflexion statt, und zwar Totalreflexion. In Abb. 12 ist dies für die Grenznormale 1' aus Abb. 10, die ja die Phasenlage der inhomogenen Welle bestimmt, im Vergleich zu den Verhältnissen beim Vollzylinder gezeigt. Die Grenznormale 1' legt infolge der Reflexion an der Innenfläche einen kürzeren Weg im optisch dichteren Medium zurück. In der Abb. 12 ist das bei  $\varnothing_1$  auf der Außenfläche liegende Phasensymbol beim Hohlzylinder zum größeren Winkel  $\varnothing_2$  hin verschoben. Diese Phasenverschiebung beträgt bei dem Hohlzylinder mit  $r_a = 20$  mm und  $r_i = 18$  mm etwa  $\lambda/4$ . Die damit verbundene Verschiebung der Interferenzkurven um etwa den halben Kurvenabstand stimmt sehr gut mit den Meßergebnissen überein, wie der Abb. 8d zu entnehmen ist. Zum Beispiel sind die auf  $r_5, r_4, r_3$  bei  $50^\circ, 55^\circ, 60^\circ$  liegenden Maxima des Vollzylinders auf  $55^\circ, 60^\circ, 68^\circ$  verschoben.

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Beugung im Nahfeld von unendlich langen, verlustlosen dielektrischen Voll- und Hohlzylindern mit gleichem Außenradius untersucht. Die Querschnittsabmessungen der Zylinder sind vergleichbar mit der Wellenlänge von 3,2 cm. Die Messungen wurden in einem Flachraum durchgeführt. Die Feldverteilung der dielektrischen Zylinder wird mit derjenigen vom Metallzylinder gleichen Außendurchmessers verglichen. Zur qualitativen Deutung der Meßergebnisse dient ein zeichnerisches Verfahren, das sich an die Huygens-Fresnel'sche Elementarwellenkonstruktion anschließt. Das Beugungsfeld kann auf diese Weise durch Interferenz verschiedener Wellenzüge qualitativ in Übereinstimmung mit den Meßergebnissen dargestellt werden. Bei den Untersuchungen ergibt sich, daß am Aufbau

des Beugungsfeldes im Nahfeld von dielektrischen Zylindern eine inhomogene Welle wesentlichen Anteil hat. Sie ist aus rein geometrisch-optischen Betrachtungen nicht zu gewinnen. Sie läßt sich auf Beugungswellen im Innern des Zylinders zurückführen, die an der Grenzfläche zum Teil Totalreflexion erleiden.

Herrn Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. E. h. ERWIN MEYER danke ich sehr für die Möglichkeit, diese Arbeit in seinem Institut anzufertigen, für sein reges Interesse und für die zahlreichen Diskussionen. Außerdem habe ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Nordwestdeutschen Rundfunk (i. L.) für die zur Verfügung gestellten Geräte und die Bereitstellung finanzieller Mittel zu danken.

**Literatur:** [1] SPOHN, H.: Phys. Z. **21**, 444, 469, 501, 518, 527 (1920). — [2] BOUWKAMP, C. J.: Rep. Progr. Phys. **17**, 35 (1954). — [3] SCHAEFER, CL.: Einführung in die theoretische Physik, Bd. III/1, Kap. 11. — [4] SCHAEFER, CL., u. F. GROSSMANN: Ann. Physik **31**, 455 (1910). — [5] KOBAYASHI u. IWAO: Ann. Physik **43**, 861 (1912). — [6] GEHRCKE, E. u. F. MÖGLICH: Handbuch der physikalischen Optik, Bd. 1, S. 632. — [7] BECKMANN, P., u. W. FRANZ: Z. Naturforsch. **12a**, 257 (1957). — [8] ADEY, A. W.: Canad. J. Phys. **34**, 30 (1956). — [9] TANG, C. C. H.: Scientific Report No. 6 AF 19 (604)–786. — J. Appl. Phys. **28**, 628 (1957). — [10] SCHMITT, H. J.: Scientific Report No. 11 AF 19, (604)–786. — [11] TULLO, G.: Ann. Physik **62**, 531 (1920). — [12] KODIS, R. D.: J. Appl. Phys. **23**, 249 (1952). — [13] WILES, S. T., and A. B. McLAY: Canad. J. Phys. **32**, 372 (1954). — [14] STEBBINS, M. K., and A. B. McLAY: Canad. J. Phys. **34**, 546, 559 (1956). — [15] JORDAN, C. E., and A. B. McLAY: Canad. J. Phys. **35**, 1253 (1957). — [16] EL-KHARADLY, M. M. Z.: Proc. Inst. Electr. Eng. **102** B, 17 (1955). — [17] ROW, R. V.: J. Appl. Phys. **24**, 1448 (1953). — [18] ADEY, A. W.: Canad. J. Phys. **33**, 407 (1955). — [19] MONTGOMERY, C. G.: RLS Bd. II, Fig. 8.11. — [20] SCHAEFER, CL.: Einführung in die theoretische Physik, Bd. III/1, Kap. 7. — [21] SCHAEFER, CL., u. G. GROSS: Ann. Physik **32**, 648 (1910). — [22] PICT, J. Ann. Physik (5) **3**, 433 (1920).

Diplom-Physiker VOLKMAR MÜLLER,  
III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

## Wirbelstrom- und Spinrelaxationsverluste in dünnen Metallbändern bei Frequenzen bis zu etwa 1 MHz

Von RICHARD BOLL

Mit 11 Textabbildungen

(Eingegangen am 2. Januar 1960)

### 1. Einleitung

Die Wechselfeldverluste von Blechen im Bereich der Anfangspermeabilität kann man mit der klassischen Wirbelstromtheorie berechnen — wenn von Nachwirkungsvverlusten abgesehen wird. Es ist schon seit längerem bekannt, daß die gemessenen Verluste in vielen Fällen größer sind als die berechneten und daß die gemessene Grenzfrequenz niedriger liegt als die berechnete. Man bezeichnet dieses Verhalten bisher meist als „Wirbelstromanomalie“. Es ist jedoch noch nicht hinreichend geklärt, inwieweit tatsächlich Wirbelströme und inwieweit andere Effekte, insbesondere die Spinrelaxation, zu den erhöhten Verlusten beitragen und welche Werkstoffparameter letzten Endes

hierfür maßgebend sind. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, diesen Problemkreis zusammenfassend zu behandeln.

### 2. Darstellung der Wechselfeldverluste

Die Verluste in schwachen magnetischen Wechselfeldern beschreibt man zweckmäßigerweise mit dem Verlustfaktor  $\operatorname{tg} \delta$ , der das Verhältnis von Imaginärteil zu Realteil der komplexen Permeabilität ist:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_{RR}}{\mu_{LR}} - \frac{1}{\frac{\mu_{LR}}{\mu_{LP}}} \left\{ \frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{\mu_{LR} - j\mu_{RR}}{\mu_{LP}} + j \frac{1}{\mu_{RP}} \right\} \quad (1)$$



AN hat gezeigt, daß dieser Verlustfaktor aus  
Anteilen besteht [1]. Man kann deshalb  
Ansatz machen [2]:

$$\operatorname{tg} \delta = \omega \cdot c_w + c_h \cdot H_{\text{eff}} + c_n \quad (2)$$

$\omega$  = Kreisfrequenz,  
 $c_w$  = Wirbelstrombeiwert,  
 $c_h$  = Hysteresebeiwert,  
 $c_n$  = Nachwirkungsbeiwert,  
 $H_{\text{eff}}$  = Effektivwert der Feldstärke.

rollen uns im folgenden auf sehr kleine Feldstärken  
ränken ( $H_{\text{eff}} \rightarrow 0$ ), so daß der Hystereseeanteil des  
stfaktors entfällt. Wenn wir (2) durch die An-  
permeabilität  $\mu_A$  dividieren und beachten, daß  
frequenzen, die klein gegen die Wirbelstromgrenz-  
enz sind,  $\mu_{LR} = \mu_A$  ist, erhalten wir:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta}{\mu_A} = \frac{\mu_{RR}}{\mu_A^2} = \frac{1}{\mu_{RP}} = \frac{c_w}{\mu_A} \cdot \omega + \frac{c_n}{\mu_A} \quad (3)$$

vorliegende Arbeit soll sich mit dem frequenz-  
proportionalen Verlustanteil  $c_w \cdot \omega / \mu_A$  befassen. Wenn  
3) nach  $\omega$  differenzieren, verschwindet der fre-  
quenzabhängige Anteil  $c_n / \mu_A$ , der die Jordan-  
wirkung beschreibt. Wir erhalten somit

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} = \frac{c_w}{\mu_A} \quad (4)$$

dem klassischen Wirbelstrombeiwert

$$c_w = \frac{d^2}{12 \varrho} \cdot \mu_A \quad (5)$$

$d$  = Blechdicke,  
 $\varrho$  = spez. el. Widerstand

aus (4):

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \varrho = d^2 \quad (6)$$

linke Seite von (6) nennen wir in dieser Arbeit  
spezifischen Verlust“, bezogen auf Frequenz und  
rische Leitfähigkeit.

Die experimentelle Nachprüfung von (6) an ver-  
edenen Werkstoffen ergibt aber keineswegs eine  
che Übereinstimmung mit  $d^2$ . Vor allem bei sehr  
gen Blechdicken wurde ein stark abweichendes  
halten gefunden. Die Abb. 1 zeigt dies am Beispiel  
verschiedenen Nickleisenlegierungen<sup>1</sup>:

I. 36%iges Nickleisen verhält sich bis herab zu  
10  $\mu\text{m}$  Banddicke klassisch. Bei weiterer Ver-  
erung der Dicke findet man einen größeren spezi-  
en Verlust, als nach der klassischen Theorie zu  
arten ist; insbesondere strebt der spezifische Verlust  
verschwindender Blechdicke gegen einen endlichen  
Grenzwert, während er nach (6) gegen Null gehen  
te.

II. 50%iges Nickleisen mit regelloser Kornorien-  
ng verhält sich ähnlich wie 36%iges Nickleisen,  
Grenzwert des spezifischen Verlustes liegt jedoch  
s höher.

III. 50%iges Nickleisen mit Würfeltextur weist  
gegenüber schon bei relativ großen Blechdicken  
ächtlich höhere spezifische Verluste auf als man  
(4) bzw. (6) erwarten sollte; außerdem verläuft  
Kurve flacher als bei den anderen Werkstoffen. In  
1 ist eine aus mehreren Messungen gemittelte  
ve angegeben.

Weitere Ergebnisse s. in [3].

Bei sehr geringer Dicke streben die Kurven des  
isotropen und des anisotropen 50%igen NiFe demselben  
Grenzwert zu.

IV. 5-79-Permalloy liegt mit seinem Kurvenver-  
lauf etwa zwischen dem isotropen und dem anisotropen  
50%igen NiFe. Der Grenzwert der spezifischen Ver-  
luste liegt allerdings höher als beim 50%igen NiFe. Die  
dargestellte Kurve ist ebenfalls eine mittlere Kurve  
aus vielen Messungen.

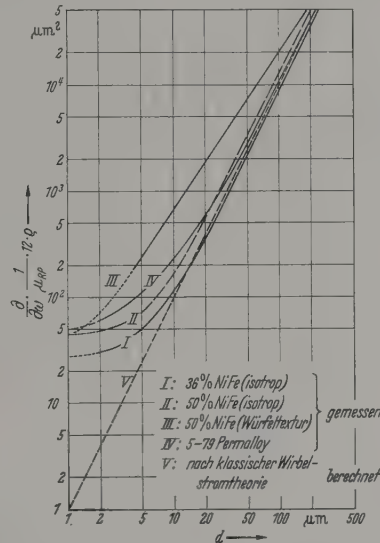


Abb. 1. Blechdickenabhängigkeit von  $\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \cdot \varrho$

Um die Kurven der Abb. 1 beschreiben zu können,  
müssen wir die Gl. (6) erweitern. Wir multiplizieren  
dazu die rechte Seite von (6) mit einem „Anomalie-  
faktor“  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \varrho = d^2 \cdot \eta \quad (7)$$

Wegen (4) kann man den Anomaliefaktor  $\eta$  auch als  
das Verhältnis der gemessenen Zeitkonstanten  $c'_w$  bzw.  
Grenzfrequenz  $\omega'_w$  zu der nach der klassischen Wirbel-  
stromtheorie berechneten Zeitkonstanten  $c_w$  bzw.  
Grenzfrequenz  $\omega_w$  betrachten [4]:

$$\eta = \frac{c'_w}{c_w} = \frac{\omega_w}{\omega'_w} = \frac{f_w}{f'_w}, \quad \omega_w = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{c_w} \quad (8)$$

Den Grenzwert von (7) für verschwindende Blechdicke  
wollen wir mit  $A_r$  bezeichnen. Es gilt also

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \varrho = A_r \neq 0 \quad (9)$$

Die Abb. 2 zeigt den aus Abb. 1 entnommenen Anoma-  
liefaktor  $\eta$  für die vier obengenannten Werkstoffe.  
Um die Kurven der Abb. 1 und 2 verstehen zu können,  
müssen wir zunächst betrachten, wie  $\eta$  von der Blech-  
dicke abhängen kann. Dazu sollen 4 Fälle erörtert  
werden:

- Klassische Wirbelströme.
- Inhomogene Permeabilität über den Blechquer-  
schnitt.
- Einfluß der Bezirksstruktur (parallele Bloch-  
wände).
- Spinrelaxation.

### 3. Die Blechdickenabhängigkeit des spezifischen Verlustes

#### 3.1. Klassische Wirbelströme

Die klassische Wirbelstromtheorie, die ein ferromagnetisches Blech als homogenes magnetisches Medium mit konstanter Anfangspermeabilität ansieht, führt nach (6) auf die in Abb. 1 eingezeichnete Gerade  $V$ ;  $\eta$  ist in diesem Fall stets gleich 1.

#### 3.2. Inhomogenität der Permeabilität über den Blechquerschnitt

PETERSON und WRATHALL haben 1936 bei Chrom-Permalloy ein zu schnelles Absinken der Permeabilität mit der Frequenz beobachtet und dies einer Abnahme der lokalen Anfangspermeabilität vom Blechinneren zur Oberfläche zugeschrieben [5]. Ähnliche Feststellungen und Deutungen sind von einer ganzen Reihe anderer Autoren bekannt geworden [6] bis [10].

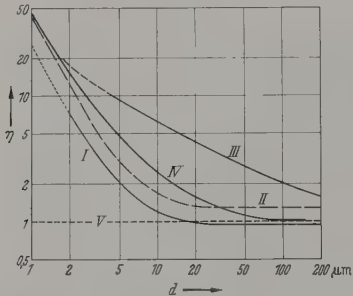


Abb. 2. Blechdickenabhängigkeit des Anomaliefaktors  $\eta$  (Werkstoffe wie Abb. 1)

Von FELDTKELLER u. Mitarb. ist dieses Problem an mehreren Werkstoffen eingehend untersucht und mathematisch behandelt worden [2], [11]. Dabei wurde angenommen, daß die Permeabilitätsverteilung über den Blechquerschnitt durch eine Potenzfunktion dargestellt werden kann. Die Theorie der Blechinhomogenität liefert für  $\eta$  Werte zwischen 0,6 und 1,9; größere Anomaliefaktoren kann diese Theorie nicht erklären.

#### 3.3. Einfluß der Bezirksstruktur (parallele Blochwände)

Die klassische Wirbelstromtheorie und die in 3.2. skizzierte Theorie der Blechinhomogenität lassen sich nicht mehr anwenden, wenn die Ausdehnung der Weißschen Bezirke in die Größenordnung der Blechdicke kommt. Für diesen Fall muß eine auf der Bezirksstruktur aufbauende Wirbelstromtheorie herangezogen werden, die von WILLIAMS, SHOCKLEY, KITTEL und POLIVANOV sowie von BROUWER und neuerdings auch von PRY und BEAN entwickelt wurde [12] bis [15]. Der Unterschied gegenüber der klassischen Theorie besteht darin, daß die Maxwellschen Gleichungen nicht auf das Blech als homogenes, kontinuierliches Medium mit konstanter Permeabilität angewendet werden, sondern auf die magnetischen Elementarbereiche, insbesondere auf die Umgebung der Blochwände.

Einen Übergang von der Wirbelstromtheorie bei Blechinhomogenität zu der auf der Bezirksstruktur

basierenden Wirbelstromtheorie findet man, wenn man nach WILLIAMS, SHOCKLEY, KITTEL und nach SORGER [12], [16] eine Permeabilitätsverteilung über den Blechquerschnitt so annimmt, daß das Gebiet, in dem sich die Blochwand befindet und das sie überstreicht, eine sehr hohe Anfangspermeabilität besitzt, das von der Blochwand nicht überstrichene Gebiet dagegen eine sehr niedrige Permeabilität.

Die von der magnetischen Bezirksstruktur ausgehende Theorie, der einfache Bezirksmodelle mit  $180^\circ$ - oder  $90^\circ$ -Blochwänden zugrundeliegen, liefert einen Anomaliefaktor, der vom Verhältnis  $2l/d$  (Wandabstand/Blechdicke) abhängt. POLIVANOV sowie PRY und BEAN kommen zu derselben Formel für  $\eta_w$  und erhalten [13], [15]:

$$\eta_w = \frac{96}{\pi^3} \cdot \frac{l}{d} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{Cotg} \frac{n \cdot \pi \cdot l}{d} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Für dünne Bänder, bei denen der Wandabstand gleich oder größer als die Blechdicke ist, kann man die Gl. (10) nach der Formel

$$\operatorname{Cotg} z = 1 + 2 \cdot e^{-2z} \quad (11)$$

annähern und erhält

$$\eta_w \approx \frac{96}{\pi^3} \cdot \frac{l}{d} \approx 3 \cdot \frac{l}{d} \quad (12)$$

Man sieht aus (12), daß größere Anomaliefaktoren ab 1,9 dann auftreten, wenn  $2l/d > 1,3$  ist.

Wenn wir (12) in (7) einsetzen, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \rho = 3 \cdot l \cdot d. \quad (13)$$

Wenn also der Wandabstand größer als die Blechdicke ist, hängt der spezifische Verlust nicht mehr von  $d^2$  sondern vom Produkt  $l \cdot d$  ab. Bei größeren Blechdicken, genauer gesagt: für  $d > 2l$ , muß statt der Näherung (12) die Gl. (10) eingesetzt werden, die für  $d \gg 2l$  in den klassischen Fall ( $\eta = \eta_w = 1$ ) übergeht.

#### 3.4. Spinrelaxation

Der zeitliche Ablauf der Magnetisierungsvorgänge wird nicht nur durch Wirbelströme, sondern auch durch die Relaxation der Elektronenspins verzögert, die ebenfalls zum Auftreten eines Verlustwinkels Anlaß gibt. Wenn wir diese Verluste berechnen wollen, müssen wir unmittelbar von den magnetischen Elementarvorgängen, d.h. von den Wandverschiebungen und Drehprozessen, ausgehen. Wir beschränken uns im folgenden auf Wandverschiebungen, da diese bei magnetisch weichen Werkstoffen im allgemeinen den größten Beitrag zur Anfangspermeabilität leisten.

Der Gedanke, das Verhalten einer Blochwand, die durch ein schwaches Wechselfeld in periodische Schwingungen um ihre Ruhelage versetzt wird, durch eine Bewegungsgleichung darzustellen, stammt ursprünglich von LANDAU und LIFSHITZ [17] und wurde von DÖRING [18] weiterentwickelt. DÖRING hat der Wand eine Masse  $m$ , eine Dämpfungskonstante  $\beta$  und eine Bindungskonstante  $\alpha$  zugeschrieben. Dabei sind  $m$ ,  $\beta$  und  $\alpha$  als spezifische Wandkonstanten anzusehen. Wir können für den Rahmen der vorliegenden Arbeit



ansetzen, daß die Wandmasse  $m$  so klein ist, daß vernachlässigt werden kann. Die Blochwandgleichung lautet dann:

$$\left. \begin{aligned} \beta \cdot \dot{\alpha} + \alpha \cdot x \\ = p \cdot H \cdot I_s \cdot \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Der Faktor  $p$  ist für eine  $180^\circ$ -Wand gleich 2, für eine  $90^\circ$ -Wand gleich  $\sqrt{2}$ . Die nebenstehende Skizze zeigt das Bezirksmodell.

Für ein sinusförmiges Feld  $H = H_0 \cdot e^{j\omega t}$  führt (14) die bekannte Lösung:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_A} = \frac{1}{1 + j\omega\beta/\alpha}, \quad (15)$$

die Ortskurve einen Halbkreis ergibt. Hierin sind

$$\frac{\mu_{LR}}{\mu_A} = \frac{1}{1 + \omega^2 \cdot \beta^2 / \alpha^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\mu_{RR}}{\mu_A} = \frac{\omega \cdot \beta / \alpha}{1 + \omega^2 \cdot \beta^2 / \alpha^2}, \quad (17)$$

$$\mu_A = \frac{2\pi \cdot p^2 \cdot I_s^2 \cdot \cos^2 \Theta}{\alpha \cdot l}. \quad (18)$$

Der Verlustfaktor ergibt sich mit der Definition (1) und (16) zu:

$$\operatorname{tg} \delta_r = \frac{\beta_r}{\alpha} \cdot \omega. \quad (19)$$

Index  $r$  soll unterstreichen, daß dieser Verlustfaktor nur durch Spinrelaxation verursacht ist. Die Dämpfungskonstante  $\beta_r$  hängt mit der von LANDAU und LIFSHITZ eingeführten „Relaxationsfrequenz“  $\lambda$  zusammen [17], [19] bis [22].

Wenn wir  $\operatorname{tg} \delta_r$  auf den durch die klassischen Wirbelströme verursachten Verlustfaktor  $\operatorname{tg} \delta_0$  beziehen, erhalten wir den „Spinrelaxations-Anomaliefaktor“, der  $\eta_r$  genannt werden soll<sup>1</sup>:

$$\eta_r = \frac{\operatorname{tg} \delta_r}{\operatorname{tg} \delta_0} = \frac{\beta_r}{\alpha} \cdot \frac{12\varrho}{d^2 \cdot \mu_A}, \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{d^2 \cdot \mu_A}{12\varrho}. \quad (20)$$

Einsetzen von  $\alpha$  aus (18) folgt

$$\eta_r = \frac{3 \cdot \varrho \cdot l \cdot \beta_r}{\pi \cdot p^2 \cdot \cos^2 \Theta \cdot I_s^2} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{c \cdot l}{d^2}, \quad (21)$$

Wir führen zur Abkürzung noch die Größe  $c$  ein, die im wesentlichen nur von physikalischen Grunddaten des jeweiligen Werkstoffs abhängt.

Durch Einsetzen von  $\eta_r$  aus (21) in (7) erhalten wir den Fall reiner Spinrelaxation:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12\varrho = c \cdot l. \quad (22)$$

In diesem Fall ist also der spezifische Verlust unabhängig von der Blechdicke. Da die Spinrelaxation ein Randphänomen aller magnetischen Werkstoffe ist, ist es nunmehr verständlich, warum auch bei weitestgehender Unterdrückung der Wirbelströme bei sehr dünnen Bändern der spezifische Gesamtverlust nicht verschwindet. Siehe hierzu auch [23].

gegen Null, sondern gegen einen endlichen Grenzwert geht, wie es die Abb. 1 zeigt.

Im allgemeinen werden sowohl Wirbelströme wie Spinrelaxationen zur Anomalie der Wechselfeldverluste beitragen, so daß sich der Anomaliefaktor  $\eta$  aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$\eta = \eta_w + \eta_r. \quad (23)$$

#### 4. Trennung der Verlustanomalie in Wirbelstrom- und Spinrelaxationsanteil

Um den gesamten Anomaliefaktor  $\eta$  in die Anteile  $\eta_r$  und  $\eta_w$  zu trennen, machen wir uns die unterschiedliche Abhängigkeit der beiden Anteile von der Blechdicke zunutze. Wir bedienen uns dazu der nachstehenden Gl. (24), die den allgemeinen Fall a) beschreiben soll.

##### a) Allgemeiner Fall

$$\eta = \eta_w + \eta_r = \eta_w (l/d) + \eta_r (l/d^2). \quad (24)$$

Mit Hilfe der Gl. (21) und der Polivanov'schen Formel (12) für  $\eta_w$  können wir für dünne Bänder ansetzen:

$$\eta = \frac{D}{d} + \frac{E}{d^2} \quad (25)$$

$$D = 3 \cdot l \quad [\text{aus (12)}],$$

$$E = c \cdot l \quad [\text{aus (21)}].$$

Die Größen  $D$  und  $E$  werden dabei als Konstanten betrachtet, d.h., daß der Wandabstand  $2l$  als von der Blechdicke unabhängig angesehen wird. Da nach POLIVANOV  $\eta_w = \eta_w (l/d)$  für  $l/d \rightarrow 0$  gegen 1 geht [13], muß jedoch für größere Blechdicken beachtet werden, daß dann auch  $D/d$  gegen 1 geht.

Von besonderem Interesse ist das Verhältnis  $\eta_r/\eta_w$ . Es ergibt sich aus (24) und (25) zu

$$\frac{\eta_r}{\eta_w} = \frac{1}{d} \cdot \frac{E}{D} = \frac{1}{d} \cdot \frac{c}{3}. \quad (26)$$

Dieses Verhältnis enthält den meist nur schwer erfaßbaren Wandabstand nicht mehr. Diejenige Dicke, bei der  $\eta_r = \eta_w$  ist, wollen wir „kritische“ Dicke  $d_x$  nennen. Man erhält sie unmittelbar aus (26):

$$d_x = \frac{E}{D}. \quad (27)$$

Die Gl. (25) sollte in der Lage sein, die Abhängigkeit des Anomaliefaktors  $\eta$  allgemein zu beschreiben. Vor Anwendung auf die experimentell gefundenen Kurven wollen wir jedoch verschiedene Sonderfälle betrachten:

##### b) $\eta_w = 1$ (klassische Wirbelströme, Anomalie durch Spinrelaxation)

In diesem Fall ist

$$\eta = 1 + \eta_r = 1 + \frac{E}{d^2}. \quad (28)$$

Diese Gleichung gilt insbesondere für sehr geringe Blechdicken, für die  $\eta_r \gg 1$  ist. Aus (28) folgt, daß im Falle b) die kritische Blechdicke  $d_x = \sqrt{E}$  sein muß.

\* RICHARDS, WALKER und LYNCH haben empirisch die Beziehung  $\eta = 1 + k_0 \cdot d^{-r}$  aufgestellt und für Permalloy  $K_0 = 90$  und  $r = 1,5$  gesetzt [26].

c)  $\eta_w > \eta_r$  (Überwiegende Wirbelstromanomalie, Spinrelaxation vernachlässigbar)

Bei überwiegender Wirbelstromanomalie vereinfacht sich (25) zu

$$\eta = \eta_w = \frac{D}{d}. \quad (29)$$

Bezüglich des Übergangs in den klassischen Fall ( $\eta_w \rightarrow 1$ ) gilt das gleiche wie für (25).

Die Gl. (29) kann nicht bis zu beliebig geringen Banddicken gelten, weil dort  $\eta_r$  nicht mehr vernachlässigt werden darf.

d)  $E$  und  $D$  sind von der Banddicke  $d$  abhängig

Dies heißt nach (25), daß der Wandabstand dickenabhängig sein muß. Ein solcher Ansatz wird durch weiter unten zu besprechende experimentelle Ergebnisse und durch einige Rechnungen von KITTEL

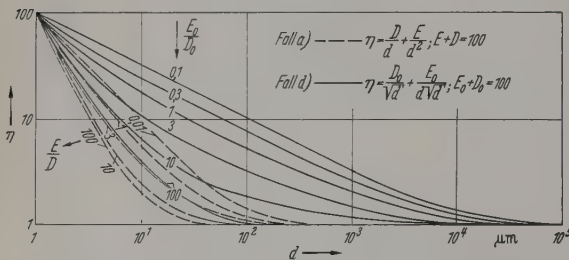


Abb. 3. Berechnete Blechdickenabhängigkeit des Anomaliefaktors

sowie von MARTIN nahegelegt, die die optimale Bezirksgröße etwa proportional zu  $\sqrt{d}$  finden [23], [24], [25]. Wir setzen deshalb  $l = c_1 \cdot \sqrt{d}$  und erhalten damit aus (25):

$$\eta = \frac{D_0}{\sqrt{d}} + \frac{E_0}{d\sqrt{d}} \quad \text{mit} \quad \left. \begin{array}{l} E_0 = c \cdot c_1, \\ D_0 = 3 \cdot c_1. \end{array} \right\} \quad (30)$$

Aus Gl. (30) entnehmen wir das Verhältnis

$$\frac{\eta_r}{\eta_w} = \frac{1}{d} \cdot \frac{E_0}{D_0} \quad (31)$$

und die Dicke  $d_x$ , bei der beide Anteile gleich sind, ist hier analog zu (27)

$$d_x = \frac{E_0}{D_0}. \quad (32)$$

Je nachdem, ob  $\eta_w$  oder  $\eta_r$  dominierend ist, vereinfacht sich Gl. (30) sinngemäß wie bei den oben behandelten Fällen.

Die sich für die Fälle a) bis d) ergebenden Kurven bzw. Kurvenscharen sind in Abb. 3 dargestellt. Zur Normierung wurde je nach Fall entweder  $E + D$  oder  $E_0 + D_0$  oder eine dieser Größen für die Blechdicke  $d = 1 \mu\text{m}$  gleich 100 gesetzt. Der wahre Wert der Größen  $E$ ,  $D$ ,  $E_0$  und  $D_0$  kann dadurch ermittelt werden, daß man die normierten Kurven parallel zur  $d$ -Achse so verschiebt, daß sie sich mit den experimentell gefundenen Kurven decken. Der Schnittpunkt der normierten Kurve mit der  $\eta$ -Achse ergibt dann für  $d = 1 \mu\text{m}$  die Summe  $E + D$ ,  $E_0 + D_0$  bzw. eine dieser Größen, entsprechend den diskutierten Fällen.

Die Kurvenscharen der Abb. 3 werden weiter unten zur Trennung der gemessenen  $\eta$ -Werte in  $\eta_r$  und  $\eta_w$  benutzt.

Eine Berechnung der kritischen Blechdicke  $d_x$  ist in [3] durchgeführt.

## 5. Durchgeführte Messungen, Werkstoffe, Meßobjekte

### 5.1. Meßmethode

Es wurden Messungen des relativen Verlustfaktors  $\text{tg } \delta/\mu_A$  bei sehr kleinen Feldstärken (0,5 ... 1,0 mA/cm) durchgeführt und der mit Gl. (6) eingeführte spezifische Verlust  $\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12\rho$  bestimmt. Die gemessenen Werte wurden mit den nach der klassischen Wirbelstromtheorie berechneten verglichen und daraus der Anomaliefaktor  $\eta$  ermittelt.

Für den Frequenzbereich von 0,1 ... 100 kHz stand eine Maxwell-Brücke Rel 3R 115a, für Frequenzen bis zu etwa 1 MHz eine Scheinwiderstandsmeßbrücke Rel 3R 218a von Siemens & Halske zur Verfügung.

Die Meßfehler dürften nach einer Abschätzung von LOHRMANN<sup>1</sup> bei tiefen Frequenzen unter 1% liegen bei hohen Frequenzen unter 3%. Die Luftinduktivität der ohne Eisenkern bewickelten Keramikträger wurde bei Proben mit kleinem Eisenquerschnitt und niedriger Permeabilität gesondert gemessen und bei der Permeabilitätsberechnung berücksichtigt; die Windungszahlen lagen bei Frequenzen über 100 kHz zwischen 3 und 7, bei niedrigeren Frequenzen bei 15 bis 30. Die Messungen wurden bis auf weiter unten erwähnte Ausnahmen im thermisch abmagnetisierten Zustand durchgeführt; die Meßtemperatur betrug in allen Fällen etwa 20°C.

### 5.2. Werkstoffe und Meßobjekte

Die Untersuchungen erstreckten sich auf verschiedene Nickeleisen- und Kobalteisenlegierungen. Wir beschränken uns hier auf die im Abschnitt 2 erwähnten Nickeleisenlegierungen. Bezüglich näherer Einzelheiten über diese und verschiedene andere Werkstoffe sei auf [3] verwiesen.

Meßobjekte waren kleine Ringbandkerne, die auf Keramikträger gewickelt waren („Zwergkerne“). Der hauptsächlich verwendete Keramikträger hatte folgende Abmessungen: Außendurchmesser 26 mm, Innendurchmesser 19 mm, Höhe 6 mm; die Bandkerne selbst hatten etwa 25 mm Außendurchmesser, 20 mm Innendurchmesser und 4 bis 5 mm Höhe. Die untersuchten Banddicken lagen zwischen 2,3 und 30  $\mu\text{m}$ . Die Bandlagen waren gegeneinander mit einer Magnesia-Emulsion sorgfältig isoliert. Die Abb. 4 zeigt einen solchen „Zwergkern“. Für einige Versuche wurden auch etwas größere Bandkerne in Blechdicken bis 0,15 mm verwendet.

### 5.3. Herstellung der dünnen Bänder

Die hier untersuchten dünnen Bänder wurden bis herab zu 6 bis 10  $\mu\text{m}$  Dicke durch Kaltwalzen hergestellt, davon die letzten Walzschnitte auf einem 20-Rollen-Walzwerk mit kleinen Arbeitswalzen [27], [28]. Geringere Banddicken ließen sich durch anschließendes Abätzen erzielen. Der Einfachheit halber

<sup>1</sup> Mündliche Mitteilung von D. LOHRMANN auf Grund einer im Institut für Nachrichtentechnik der TH Stuttgart im Jahre 1958 durchgeführten Diplom-Arbeit.



mit Eisenchlorid chemisch abgeätzt — in Abhängigkeit von dem in der Literatur meist angegebenen elektrolytischen Ätzen [29]. Es gelang, Bänder mit einer Dicke von 2 ... 3  $\mu\text{m}$  mit relativ guter mechanischer Beschaffenheit herzustellen<sup>1</sup>.

#### 5.4. Besonderheiten dünner Bänder

Mit Verringerung der Blechdicke weichen die magnetischen Eigenschaften immer stärker von denen dickeren Materials ab. Dies gilt insbesondere für die Kristallstruktur- und störungsbedingten Größen, wie Anfangspermeabilität und Koerzitivkraft. So ist bei dünnen permeablen Werkstoffen mit der Verringerung der Blechdicke unter 0,05 ... 0,03 mm eine Abnahme der Permeabilität und eine Zunahme der Koerzitivkraft verbunden.

Eine wesentliche Ursache für dieses Verhalten ist darin zu suchen, daß mit Verringerung der Dicke die Oberflächen-schichten einen immer größeren Teil des Blechquerschnitts ausmachen. Die Oberflächen-schichten sind in besonderem Maße mit Störstellen besetzt, die den Magnetisierungsprozeß erschweren. Solche Störstellen sind z.B. Fremdkörper, die in die Oberfläche eingewalzt wurden, oder Reaktionsprodukte, die durch Wechselwirkung zwischen Metall und Glühatmosfera entstanden sind — insbesondere Oxide. Ferner zählen zu den Störstellen mikroskopische Rauigkeiten und Unebenheiten, die durch Verformen oder Wanderung bestimmter Metallatome entstanden sind, und vor allem die Korngrenzen, an denen sich leicht Verunreinigungen anhäufen und auch durch Verdampfen „Gräben“ entstehen.

Bei vielen Werkstoffen kommen zu dem Einfluß der Oberflächen-schichten mit abnehmender Blechdicke Veränderungen in der Kristallorientierung hinzu. Dies hängt unter anderem damit zusammen, daß bei geringen Enddicken gewalzte Bleche und Bänder mit hoher Kaltwalzgrade erfahren, die zu bestimmten Mikrostrukturen führen und die ihrerseits das bei der Kristallisation entstehende Gefüge und dessen Orientierung wesentlich beeinflussen [34] bis [37]. Mit abnehmender Blechdicke weichen auch die Kristallstrukturen von denen des dickeren Materials ab. Dies ist besonders ausgeprägt, wenn die Blochwandabstände in die Größenordnung der Banddicke kommen (vgl. z.B. Abschnitt 4, Fall d).

### 6. Experimentelle Ergebnisse

#### 6.1. Bisher vorliegende Untersuchungen

Die ersten einigermaßen systematischen Untersuchungen dürften von ABGRALL und EPELBOIN stammen, die Mumetallbänder auf elektrolytischem Wege schrittweise bis auf 3  $\mu\text{m}$  abpoliert und Anomaliefaktoren bis zu 18 gemessen haben [38]. RICHARDS, WALKER und LYNCH haben — ebenfalls an mumetallähnlichen Legierungen — den Anomaliefaktor in Abhängigkeit von der Walz- und Glühbehandlung untersucht [26]. F. PFEIFER wurden Messungen des Anomaliefaktors an der Permalloy-Legierung „M 1040“ im

Diese dünnen Bänder sind von den durch Aufdampfen elektrolytisches Niederschlagen hergestellten extrem dünnen Filmen und Schichten zu unterscheiden, über die in den letzten Jahren eine umfangreiche Literatur entstanden ist (siehe z.B. [30] bis [33]), deren Dicke jedoch meist im Bereich einiger 100 oder 1000 Å liegt.

Banddickenbereich 10 ... 50  $\mu\text{m}$  — mit der Anfangspermeabilität als Parameter — durchgeführt<sup>2</sup>. Über Versuche an Siliziumeisen, das von 0,6 auf 0,4 bzw. von 0,35 auf 0,15 mm abpoliert wurde, ist unlängst von PRY und BECKER berichtet worden [39]; diese Autoren haben  $\eta_w$  in Abhängigkeit vom Verhältnis Blechdicke/Blochwandabstand aufgetragen und mit der Kurve in Übereinstimmung gefunden, die sich aus Gl. (10) bzw. (12) ergibt. Weitere Ergebnisse stammen von LEE, der an „Perminvar“ den Anomaliefaktor längs der Hystereseschleife bei verschiedenen Temperaturen gemessen hat [40]. Auf Einzelwerte, die von mehreren Autoren an verschiedenen Werkstoffen gewonnen

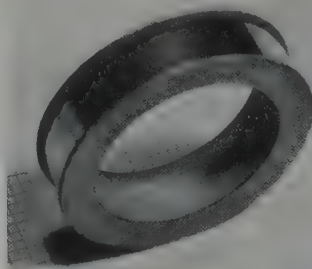


Abb. 4. Auf Keramikträger aufgewickelter Bandkern („Zwergkern“)

wurden und über die z.B. BATES und HART sowie PARKIN berichtet haben, wird weiter unten noch eingegangen [41], [42] (vgl. 6.4).

#### 6.2. Werkstoffe mit Verlustanomalie durch Spinrelaxation

Ein typisches Beispiel für diesen Fall ist 36% Nickeleisen (s. Abb. 5a). Von etwa 10  $\mu\text{m}$  Blechdicke an abwärts steigt  $\eta$  mit  $1/d^2$ , während bei größeren

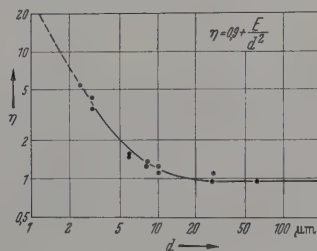


Abb. 5a. Gemessene Anomaliefaktoren von 36% NiFe (Permenorm 360 1 K 1)

Dicken  $\eta$  konstant und ungefähr 1 ist. Die geringfügige Abweichung von 1 dürfte bei größeren Dicken auf eine schwache Anomalie durch Variation der lokalen Anfangspermeabilität über den Querschnitt zurückzuführen sein und braucht hier nicht näher betrachtet zu werden.

Da bei 36% NiFe keine Wirbelstromanomalie vorliegt, muß das Verhältnis  $2l/d$  sehr klein sein, d.h. daß sehr kleine Weißsche Bezirke vorliegen. Aus der

<sup>2</sup> Mündliche Mitteilung nach Messungen im Laboratorium der Vacuumschmelze AG.

Polivanov'schen Formel (12) ist zu entnehmen, daß der Wandabstand nicht größer als etwa die halbe Blechdicke sein darf, wenn das Wirbelstromverhalten noch annähernd klassisch sein soll. Die Schliffbilder von dünnen Bändern aus 36% NiFe ergeben bei 6 bis 10  $\mu\text{m}$  Blechdicke mittlere Korndurchmesser von etwa 10  $\mu\text{m}$  (Abb. 5b). Da bei regelloser Kristallorientierung die Weißschen Bezirke im allgemeinen

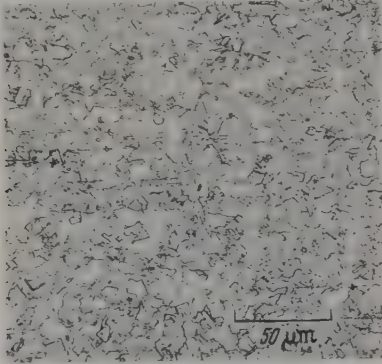


Abb. 5b. Schliffbild von 36% NiFe, Banddicke 10  $\mu\text{m}$ , mittlerer Korndurchmesser etwa 10  $\mu\text{m}$

kleiner als die Korndurchmesser zu erwarten sind, würde dies bedeuten, daß z.B. bei 10  $\mu\text{m}$  Blechdicke ein Korn mindestens zwei Elementarbezirke enthalten müßte, bei geringerer Banddicke entsprechend mehr.

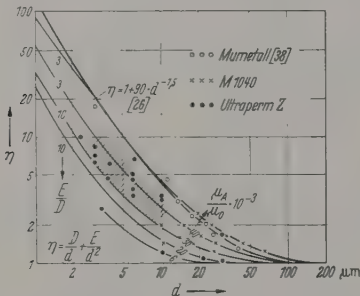


Abb. 6. Gemessene Anomaliefaktoren von Permalloy-Werkstoffen

Das Vorhandensein kleiner Elementarbereiche wird auch daraus verständlich, daß das Material relativ niedrig gegläut wird (etwa 2 Std bei 650° C), infolgedessen noch nicht vollständig rekristallisiert ist und deshalb sicherlich noch geringe Restspannungen enthält, die erfahrungsgemäß zu sehr kleinen Bezirken, z.B. „Pflasterstrukturen“ oder „Labyrinthmustern“ Anlaß geben.

Aus der  $\eta$ - $d$ -Kurve der Abb. 5a entnimmt man unmittelbar und mit (27) findet man leicht, daß bei etwa 5,4  $\mu\text{m}$  Blechdicke  $\eta_w = \eta_r = 0,9$  ist, da bei dieser Dicke  $\eta = 1,8$  beträgt. Die Konstante  $E$  beträgt etwa 26 ... 32  $\mu\text{m}^2$ , wie man aus Abb. 5a bei  $d = 1 \mu\text{m}$  direkt entnehmen kann.

### 6.3. Werkstoffe mit Verlustanomalie durch Wirbelströme und Spinrelaxation

Die Legierungen der Permalloygruppe gehören zu den Werkstoffen, bei denen die Anomalie sowohl durch Wirbelströme als auch durch Spinrelaxationen verur-

sacht wird (allgemeiner Fall  $\alpha$ ); die Spinrelaxation ist jedoch stark überwiegend (Abb. 6). Die von RICHARDS WALKER und LYNCH angegebene empirische Beziehung [26] läßt sich mit Gl. (25) annähern, wenn man  $E/D = 3 \dots 10$  annimmt; das gleiche trifft auch für die von ABGRALL und EPELBOIN [38] gefundenen Meßwerte zu.

Die eigenen Meßergebnisse können ebenfalls durch Kurven mit  $E/D = 3 \dots 10$  angenähert werden; bei niedriger Anfangspermeabilität passen die Kurven  $E/D = 10$  (oder größer) am besten zu den Meßwerten bei hoher Anfangspermeabilität dagegen die Kurven  $E/D = 3$ . Mit zunehmender Permeabilität wird also der Einfluß der Wirbelstromanomalie größer. Aus den Messungen an „M 1040“ sieht man, daß die Höhe der Anfangspermeabilität wesentlich in  $E + D$  eingeht (Abb. 6).

Die kritische Blechdicke ist identisch mit dem Verhältnis  $E/D$  und beträgt somit bei Permalloywerkstoffen 3 ... 10  $\mu\text{m}$ . LEE hat für „Supermalloy“ 2,5  $\mu\text{m}$  abgeschätzt [23]. Aus Messungen der Schaltzeiten (Ummagnetisierungszeiten) dünner Bänder wurden für  $d_x$ -Werte von etwa 10  $\mu\text{m}$  gefunden [3], [21], [43].

Außer Permalloy gehört auch Kobalteisen mit 50% Kobalt zu den Werkstoffen, bei denen die Verlustanomalie sowohl durch Wirbelströme als auch durch Spinrelaxation verursacht wird. Der Anteil der Wirbelstromanomalie ist jedoch größer als bei Permalloy-Legierungen [3].

### 6.4. Werkstoffe mit Wirbelstromanomalie

Ein typisches Beispiel für einen Werkstoff, bei dem  $\eta$  schon bei relativ großer Blechdicke hohe Werte hat aber nur mit  $1/\sqrt{d}$  wächst, ist 50% NiFe mit Würfeltextur („5000Z“).

Eine Abhängigkeit von  $1/\sqrt{d}$  ist nach (30) zu erwarten, wenn eine ausgesprochene Wirbelstromanomalie vorliegt und außerdem die Annahme gemacht wird, daß  $l$  proportional zu  $\sqrt{d}$  ist (Fall d).

Zur Wirbelstromanomalie von 5000Z ist folgendes zu sagen: Wenn auch die Korngröße von 50% NiFe mit Würfeltextur relativ klein ist (etwa 10  $\mu\text{m}$ ), ist es sehr wahrscheinlich, daß wegen der guten Kornorientierung<sup>1</sup> dieses Materials die Bezirksgröße erheblich größer ist als die Korngröße und auf diese Weise hohe Werte von  $l/d$  zustandekommen und die Polivanov'sche Formel (12) anzuwenden ist. Hinweis in dieser Richtung wurden von PARKIN und LEE gegeben [23], [42]. Über die Korngrenzen hinausgehende Bezirke wurden erstmalig von WILLIAMS an kornorientiertem Siliziumeisen nachgewiesen [44].

Nach Abb. 7a lassen sich die bei 50% NiFe mit Würfeltextur gefundenen  $\eta$ -Werte in einen Bereich einschließen, der zwischen den Kurven liegt, die sich aus Gl. (30) für  $E_0/D_0 = 0,1 \dots 0,3$  ergeben. Der Einfluß der Spinrelaxation tritt also bei 5000Z gegenüber der stark ausgeprägten Wirbelstromanomalie zurück und fällt auch bei den dünnsten hier gemessenen Bändern (mit Würfeltextur) kaum ins Gewicht. Die Breite des Näherungsbereiches parallel zu

<sup>1</sup> Die Würfeltextur stellt sich nach einer Kaltverformung von mehr als 97% und anschließender Rekristallisationsglühung bei etwa 1050° C mit großer Schärfe ein.



Anse dürfte auf Unterschiede in den Wandabständen der einzelnen Proben zurückzuführen sein, die in  $\eta$  bzw.  $\eta_w$  eingehen.

Unterhalb von etwa  $6\text{ }\mu\text{m}$  Blechdicke nähern sich gemessenen Werte mehr und mehr der Kurve, die für isotropes 50% NiFe gemessen wird. Die Ursache dieses Verhalten ist darin zu suchen, daß unterhalb von etwa  $6\text{ }\mu\text{m}$  Blechdicke die Würfeltextur an der Oberfläche verliert [36]. Mit der Abnahme der Texturtiefe entfällt aber die Voraussetzung für die Entstehung großer, über die Korngrenzen hinausgehender Orientierungsbezirke; damit verschwindet auch die Ursache für eine ausgeprägte Wirbelstromanomalie.

Im Zusammenhang zwischen Texturschärfe und Anomaliefaktor nachzuprüfen, wurden Kerne von  $100\text{ }\mu\text{m}$  Dicke so geglüht, daß in beiden Fällen ein körniges Gefüge vorlag, im einen Fall jedoch gut ausgeprägte Würfeltextur, im anderen Fall dagegen eine nahezu regellose Kristallorientierung. Das letztere läßt sich z.B. dadurch erreichen, daß man die Oberflächen- — im Gegensatz zum normalen Voran — in einer feuchten oder leicht sauerstoffhaltigen Wasserstoffglühatmosfera durchführt.

Während Proben mit Würfeltextur den zu erwartenden hohen Anomaliefaktor zeigten, ergaben die texturfreien Proben eine  $\eta$  —  $d$ -Kurve, wie sie im klassischen Wirbelstromverhalten und überwiegend Anomalie durch Spinrelaxation zu erwarten ist (Abb. 7a). Die  $\eta$  —  $d$ -Kurve ähnelt weitgehend der bei 50% NiFe gefundenen Kurve (vgl. Abb. 5a), die als Beispiel für reine Anomalie durch Spinrelaxation anzusehen ist.

In Abb. 7b ist an  $50\text{ }\mu\text{m}$ -Band durch Röntgenaufnahmen belegt, daß der Unterschied in den Werten auf Unterschiede in der Kristallorientierung der Proben zurückzuführen ist. Dies steht auch im Einklang mit Angaben von PARKIN [42], daß bei 50% NiFe  $\eta$  durch Kornorientierung von 1,7 auf 2,4 ... 3,1 steigt und bei 65% NiFe — nach Bezirksorientierung durch Magnetfeldglühung —  $\eta$  von 1,18 auf 2,20 wächst.

Das 50% NiFe ist ein besonders geeignetes Material für  $\eta$ -Untersuchungen, da am gleichen Werkstoff durch Variation der Schlußglühbehandlung — die Extremfälle für die Dickenabhängigkeit des Anomaliefaktors realisiert werden können, nämlich die Abhängigkeit von  $1/\sqrt{d}$  und von  $1/d^2$ .

Es sei bemerkt, daß von NEURATH unlängst bei zinnernen-Texturblech ebenfalls eine Abhängigkeit der Verlustanomalie (Wirbelstromanomalie) von  $1/\sqrt{d}$  festgestellt wurde [45].

### 6.5. Einfluß der Abmagnetisierung auf den Anomaliefaktor

Wie wir gesehen haben, hängt das Ausmaß bzw. das Auftreten einer Wirbelstromanomalie ursächlich von der Größe der Weiß'schen Bezirke zusammen. Die Bezirksgröße und -konfiguration wird aber nicht nur von der Größe und Orientierung der Kristallkörner beeinflusst, sondern auch durch die Art der Abmagnetisierung. Man kann dies deutlich am 50% Nickenleisen sehen, wenn entweder „thermisch“ (Erhitzung der Probe über den Curie-Punkt) oder mit einem stetig zunehmenden Wechselfeld abmagnetisiert wird.

Die Tabelle gibt als Beispiel Mittelwerte von Anomaliefaktoren an, die bei mehrmaliger Wiederholung von thermischer bzw. von Wechselstrom-

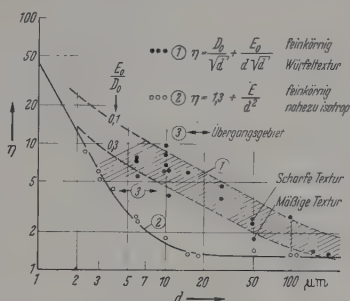
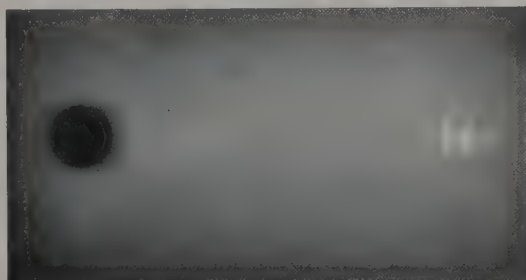
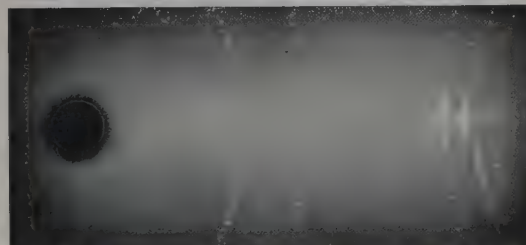


Abb. 7a. Gemessene Anomaliefaktoren von 50% NiFe mit und ohne Würfeltextur



Scharfe  
Würfel-  
textur  
 $\eta = 2,3$



Schwach  
aus-  
geprägte  
Würfel-  
textur  
 $\eta = 1,7$

Abb. 7b. Röntgendiagramm von rekrystallisiertem 50% NiFe (0,05 mm), Debye-Scherrer-Aufnahmen (Fe-Strahlung)

abmagnetisierung gemessen wurden. Die Versuche wurden an je einer Probe mit scharfer und mit schwach ausgeprägter Würfeltextur (nahezu isotropes Material) durchgeführt; die Texturaufnahmen dieser Proben sind in Abb. 7b wiedergegeben.

Während bei nahezu isotropem 50% Nickenleisen der Anomaliefaktor durch die Art der Abmagnetisierung kaum beeinflusst wird, unterscheiden sich bei

Tabelle. Wirbelstromanomalie und Abmagnetisierung

Werkstoff	Blechdicke	Art der Abmagnetisierung	$\eta_w$	Hieraus berechneter mittlerer Wandabstand
50% NiFe mit Würfeltextur	50 $\mu\text{m}$	thermisch	2,3	76 $\mu\text{m}$
	50 $\mu\text{m}$	mit Wechselstrom	7,0	235 $\mu\text{m}$
50% NiFe nahezu isotrop	50 $\mu\text{m}$	thermisch	1,7	57 $\mu\text{m}$
	50 $\mu\text{m}$	mit Wechselstrom	1,6	53 $\mu\text{m}$

Material mit ausgeprägter Würfeltextur die Anomaliefaktoren fast um den Faktor 3. Dieser starke Unterschied besagt, daß bei Material mit Würfeltextur je

nach Art der Abmagnetisierung sehr verschiedenartige Bezirkskonfigurationen und insbesondere unterschiedliche Wandabstände entstehen. Die mit (12)

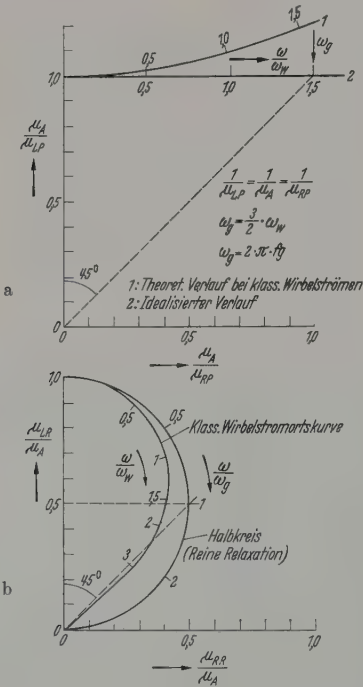


Abb. 8 a u. b. Zur Definition der Grenzfrequenz  $\omega_g$

aus den gemessenen Anomaliefaktoren berechneten Wandabstände sind in der Tabelle mitangegeben.

Der Einfluß der Abmagnetisierung scheint bei Texturmaterial besonders groß zu sein. F. ASSMUS

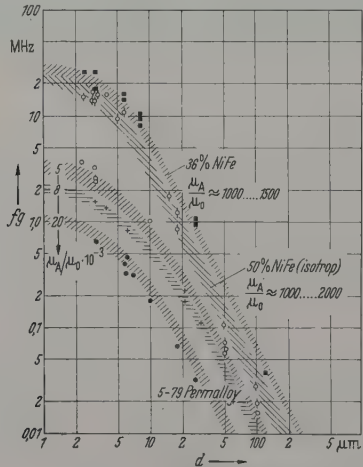


Abb. 9. Gemessene Grenzfrequenzen von Blechen

folgt aus Messungen der reversiblen Permeabilität an 50% Nickeleisen mit Würfeltextur, daß bei thermischer Abmagnetisierung im wesentlichen 90°-Wände, bei Wechselstromabmagnetisierung hauptsächlich 180°-Wände entstehen [46].

## 7. Die Grenzfrequenz von dünnen Bändern

Bei metallischen Magnetwerkstoffen dient bisher stets die klassische Wirbelstromgrenzfrequenz  $\omega_w$  bzw.  $f_w$  zur Kennzeichnung der Frequenzabhängigkeit der Anfangspermeabilität [2], [47]:

$$f_w = \frac{4 \cdot \rho}{\pi \cdot \mu_A \cdot d^2}, \quad \omega_w = 2\pi \cdot f_w. \quad (33)$$

Die Formel (33) ist voraussetzungsgemäß nur für lange anwendbar, wie sich die Wirbelströme klassisch verhalten. Die Abweichungen zwischen der berechneten Grenzfrequenz  $f_w$  und der wirklich gemessenen Grenzfrequenz  $f'_w$ , wie sie durch Anomalien der Wirbelstromverluste und durch den Einfluß der Spinrelaxation auftreten können, können wir nach (8) durch den Anomaliefaktor  $\eta$  zum Ausdruck bringen.

Da jedoch mit abnehmender Blechdicke die Wirbelströme mehr und mehr zurücktreten und der Frequenzabfall in zunehmendem Maße nur noch durch die Spinrelaxation bestimmt wird, scheint es physikalisch sinnvoller, an Stelle von  $\omega_w$  eine andere Grenzfrequenz einzuführen, die  $\omega_g$  genannt werden soll. Dies wird vor allem deshalb erforderlich, weil die Ortskurve einer Relaxation anders aussieht als die klassische Wirbelstromortskurve und eine andere Frequenzteilung trägt.

### 7.1. Definition der Grenzfrequenz $\omega_g$

Die neue Grenzfrequenz  $\omega_g$  soll durch

$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot \omega_g, \quad \omega_g = 2\pi \cdot f_g \quad (34)$$

als diejenige Frequenz definiert werden, bei der in linearer Extrapolation von  $1/\mu_{RP}$  die komplexe Permeabilität den Winkel von 45° bekommen würde. Für den Fall klassischer Wirbelströme ergibt sich diese Grenzfrequenz zu

$$\omega_g = \frac{3}{2} \cdot \omega_w; \quad f_g = \frac{3}{2} \cdot f_w. \quad (35)$$

Die Definition von  $\omega_g$  nach (34) und (35) wird in Abb. 8a veranschaulicht. Im Falle reiner Relaxation entspricht  $\omega_g$  der „Halbwertsfrequenz“, bei der der Realteil der komplexen Permeabilität auf die Hälfte der statischen Anfangspermeabilität abgesunken ist und der Imaginärteil sein Maximum durchläuft (siehe Abb. 8b). Die Abb. 8b zeigt übrigens, daß die „Halbwertsfrequenz“ der klassischen Wirbelstromortskurve nur geringfügig größer ist als  $\omega_g$  nach (35).

### 7.2. Die Blechdickenabhängigkeit von $\omega_g$

Da die Spinrelaxation von den Abmessungen der Probe unabhängig ist, die Wirbelströme jedoch mit Verringerung der Probendicke abnehmen, sollte von einer gewissen Blechdicke an abwärts die Grenzfrequenz  $\omega_g$  nicht mehr von der Blechdicke abhängen. Man kann deshalb erwarten, daß es für jeden Werkstoff einen oberen Grenzwert für  $\omega_g$  gibt und daß eine „Grenzbanddicke“  $d_g$  existiert, die zu unterschreiten praktisch keine Erhöhung von  $\omega_g$  mehr bringt.

Den Grenzwert von  $\omega_g$  für sehr kleine Blechdicken wollen wir mit „Spinrelaxationsgrenzfrequenz“  $\omega_r$  bezeichnen:

$$\omega_g \rightarrow \omega_r \text{ für } d \rightarrow 0 \text{ bzw. } d \leq d_g, \quad \omega_r = 2\pi f_r. \quad (36)$$



festzustellen, inwieweit die experimentellen Ergebnisse dies bestätigen, wurden in Abb. 9 die experimentell ermittelten Grenzfrequenzen  $f_g$  für verschiedene Werkstoffe in Abhängigkeit von der Blechdicke aufgetragen. Dabei wurde  $f_g$  mittels (35) aus  $f_w$  bzw.  $f_w'$  bestimmt. Die Abb. 9 zeigt, daß die Kurven, die bei kleinen Blechdicken eine Neigung von etwa  $1/d$  bis  $1/d^2$  haben, unterhalb einer gewissen Blechdicke flacher verlaufen und schließlich in eine Waagrechte parallel zur  $f_g$ -Achse einbiegen.

Die Abb. 9 ist ein Gegenstück zur Abb. 1. Wir entnehmen aus Abb. 9, daß die Grenzbanddicke  $d_g$  weit über die Kurven eine Extrapolation zulassen — nämlich bei allen hier untersuchten Werkstoffen ungefähr gleich ist und bei  $1 \dots 2 \mu\text{m}$  liegt; die Spinrelaxations-Grenzfrequenz  $f_r$  ist dagegen (ebenso wie Grenzwert von  $\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12 \rho$ ) werkstoffabhängig.

### 7.3. Spinrelaxationsgrenzfrequenz und gyromagnetische Grenzfrequenz

Wenn die Frequenzabhängigkeit der Permeabilität hoch durch die Spinrelaxation bestimmt wird, dann wird  $\omega_r$  aus der Blochwand-Bewegungsgleichung erhalten. Aus (15) bzw. (19) folgt:

$$\omega_r = \frac{\alpha}{\beta_r} \quad (\text{Halbwertsfrequenz}). \quad (37)$$

Wenn  $\alpha$  aus (18) in (37) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\omega_r = \frac{B_s^2 \cdot p^2 \cdot \cos^2 \Theta}{8 \cdot \pi \cdot l \cdot \mu_A} \cdot \frac{1}{\beta_r}, \quad B_s = 4\pi J_s. \quad (38)$$

Wenn (38) auf die Form bringen:

$$f_r = \frac{B_s \cdot p^2 \cdot \cos^2 \Theta}{\beta_r \cdot l \cdot 16 \cdot \pi^2} \cdot \frac{B_s}{\mu_A}. \quad (39)$$

Wenn man einen Werkstoff mit  $180^\circ$ -Wänden und für den gilt, daß die Feldrichtung parallel bzw. antiparallel zur spontanen Magnetisierung der Weiß'schen Bezirke ist, vereinfacht sich (39) zu

$$f_r = \frac{B_s}{\beta_r \cdot l \cdot 4\pi^2} \cdot \frac{B_s}{\mu_A} = N \cdot \frac{B_s}{\mu_A}. \quad (40)$$

Abb. 10 zeigt die graphische Darstellung der genauen Werte von  $f_r$  als Funktion von  $B_s/\mu_A$ . Neben den eigenen Meßergebnissen an 36% NiFe und 5-79-Permalloy ist eine Reihe von genauen Halbwertsfrequenzen von Ferriten [48], [50] eingetragen. Bei Ferriten wird — wegen der Vernachlässigbarkeit von Wirbelströmen — die Frequenzabhängigkeit der Anfangspermeabilität im wesentlichen durch die Relaxation der Elektronenspins bestimmt — wenn wir von den bekannten Nachweisererscheinungen absehen.

Die Abb. 10 enthält außerdem noch Halbwertsfrequenzen von Eisen und Nickel, die einer Arbeit von KITTEL entnommen wurden [51].

Die Abb. 10 läßt erkennen, daß alle Meßwerte in schraffierten parallelen Streifen liegen, für dessen Wert man für  $N$  den Wert

$$N = 1,6 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \text{MHz}}{\text{Gauß}} \quad (41)$$

abliest. Wie die Abb. 10 zeigt, gilt die Formel (39) bzw. (40) offensichtlich sowohl für metallische als auch für oxydische Magnetwerkstoffe [3], [52].

Es ist nun interessant, die Formel (39) bzw. (40) mit der von SNOEK angegebenen Formel [53], [56] für die „gyromagnetische“ Grenzfrequenz  $f_p$  zu vergleichen [52], [54], [55]. Die Snoek'sche Formel, die für Drehprozesse abgeleitet wurde, ist von RADO auf

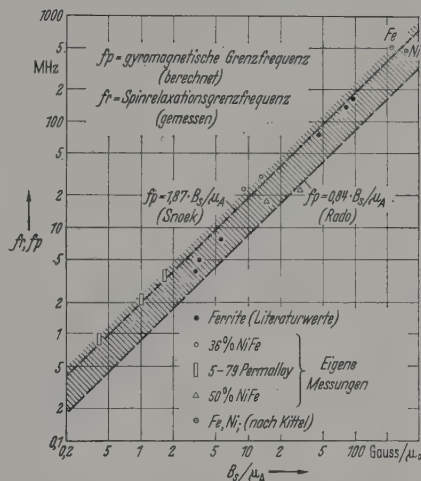


Abb. 10. Grenzfrequenz verschiedener Werkstoffe

Wandverschiebungen ausgedehnt worden [57]. Die für beide Fälle gültige Beziehung wollen wir wie folgt schreiben:

$$f_p = \frac{s \cdot \gamma}{3\pi} \cdot \frac{B_s}{\mu_A}, \quad (42)$$

$$s = 1 \quad (\text{SNOEK})$$

$$s = 0,45 \quad (\text{RADO})^*$$

$$\gamma = 1,76 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{Gauß} \cdot \text{sec}}$$

und als Zahlenwertgleichung

$$f_p / \text{MHz} = 0,84 \dots 1,87 \frac{B_s / \text{Gauß}}{\mu_A \mu_0}. \quad (43)$$

Die sich aus (43) ergebenden Geraden sind in Abb. 10 mit eingezeichnet. Man sieht, daß der durch diese Geraden begrenzte Streifen nahezu mit dem Streifen zusammenfällt, der auf Grund der Meßergebnisse gezeichnet wurde. Diese Übereinstimmung bedeutet, daß folgende Beziehungen bestehen:

$$N \approx \frac{s \cdot \gamma}{3\pi}, \quad (44)$$

$$f_r \approx f_p; \quad \omega_r \approx \omega_p. \quad (45)$$

\* Der Faktor  $s = 1 - 1/3\pi = 0,45$ , den RADO unter Hinweis auf eine Arbeit von R. GANS [58] angibt, soll berücksichtigen, daß in einer polykristallinen Probe bei Magnetisierung durch Wandverschiebungen die Magnetisierungsvektoren nicht willkürlich, sondern in einer bestimmten Weise orientiert sind.

Bei sehr kleinen Wandbewegungen, wie sie im Bereich der Anfangspermeabilität normalerweise vorliegen, kann man das von der sich bewegenden Wand erfaßte Volumen in gewissem Sinne auch als „Bezirk“ bezeichnen, innerhalb dessen die Spins sich drehen. Der Elementarvorgang bleibt dann auch in diesem Fall im wesentlichen ein — allerdings mehr inhomöner — Drehprozeß.

#### 7.4. Die Grenzfrequenz von Metallen und Ferriten

Die Gültigkeit der Snoek-Rado'schen Formeln für Ferrite und für Metalle hat eine beträchtliche praktische Bedeutung. Da die Sättigung der Metalle etwa 2 ... 8 mal so groß ist wie die der Ferrite, kann man mit Metallen bei hohen Frequenzen prinzipiell höhere Permeabilitäten erreichen als mit Ferriten — wenn durch hinreichende Verringerung der Banddicke die Wirbelströme eliminiert werden.

Die Abb. 11 zeigt dies in einer Gegenüberstellung von 3  $\mu\text{m}$ -Bändern aus 36% Nichteisen bzw. 5-79-Permalloy („Ultraperm 10“) und hochpermeablen Ferriten. Man entnimmt diesem Bild, daß z.B. bei 10 MHz die Anfangspermeabilität von 36% NiFe

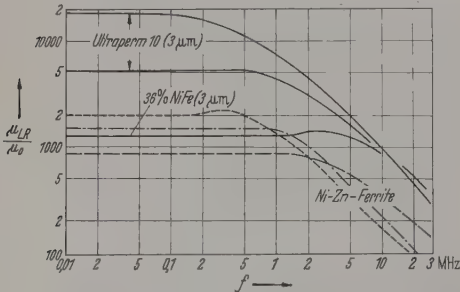


Abb. 11. Frequenzabhängigkeit der Permeabilität von dünnen Bändern und von Ferriten

rund 4mal so groß ist wie die eines Ferrites mit gleicher statischer Anfangspermeabilität. Der Faktor 4 entspricht gerade dem Verhältnis der Sättigungsinduktionen beider Stoffe.

#### 8. Der Grenzwert des spezifischen Verlustes dünner Bänder

Wir gehen für die folgenden Betrachtungen wieder von der Definition von  $\omega_g$  nach (34) aus:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot \omega_g = \frac{1}{\mu_A} \quad (46)$$

Wegen (36), (40) und (45) kann man (46) für verschwindende Blechdicke umformen in

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 2\pi \cdot N \cdot \frac{B_s}{\mu_A} = \frac{1}{\mu_A} \quad (47)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach Erweiterung mit  $12\varrho$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{\mu_{RP}} \cdot 12\varrho = \frac{6}{\pi \cdot N} \cdot \frac{\varrho}{B_s} = \frac{d^2 \cdot \eta}{\lim_{d \rightarrow 0}} \quad (48)$$

Dies ist aber der Grenzwert  $A_r$ , der mit (9) eingeführt wurde und der aus Abb. 1 für  $d \rightarrow 0$  direkt entnommen werden kann:

$$A_r = \frac{6}{\pi \cdot N} \cdot \frac{\varrho}{B_s} \quad (49)$$

\* Zwischen dem Grenzwert  $A_r$  und dem in [4] eingeführten Grenzwert  $C_r$  besteht folgender Zusammenhang:  $A_r = 1,75 C_r$ . Der Faktor 1,75 setzt sich wie folgt zusammen:  $1,75 = 1,5 \cdot \frac{1,87}{1,6}$ ; darin ist 1,5 der Umrechnungsfaktor von  $f_{\omega}$  nach [4] auf  $f_r$  bzw.  $f_g$  für  $d \rightarrow 0$ ;  $1,87/1,6$  ist das Verhältnis des nach SNOEK in (43) einzusetzenden Zahlenwertes zu dem Mittelwert für  $N$  nach (41).

Als Zahlenwertgleichung lautet (49):

$$A_r / \mu\text{m}^2 = 0,95 \cdot 10^3 \cdot \frac{\varrho / \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}}{B_s / h \text{ Gauß}} \quad (50)$$

Man sieht, daß dieser Grenzwert relativ wenig struktur- und störungsabhängig ist, da als Werkstoffdaten nur  $\varrho$  und  $B_s$  eingehen. Mit (50) berechnet man für die oben erwähnten Nichteisenlegierungen für Werte von 27 ... 71  $\mu\text{m}^2$ , aus Abb. 1 entnimmt man 28 ... 50  $\mu\text{m}^2$ . Wenn man für Permalloywerkstoffe in Abb. 1 bzw. 2 nicht eine mittlere Kurve einsetzt sondern die oberste gemessene Kurve aus Abb. 1 ( $\eta = E + D = 85$  bei 1  $\mu\text{m}$ ) erhält man für  $A_r$  einen gemessenen Bereich von 28 ... 85  $\mu\text{m}^2$ .

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist somit recht befriedigend.

Mit dem in (49) gefundenen Grenzwert für  $A_r$  können wir den durch die Spinrelaxation verursachten Anteil des relativen Verlustfaktors wie folgt schreiben

$$\frac{\text{tg } \delta_r}{\mu_A} = \frac{A_r}{12 \cdot \varrho} \cdot \omega = c_r \cdot \omega \quad (51)$$

Hierin ist  $c_r$  mit (44) und (49):

$$c_r = \frac{A_r}{12 \varrho} = \frac{1}{2\pi \cdot N \cdot B_s} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{s \cdot B_s} \quad (52)$$

#### Zusammenfassung

An Blechen und Bändern aus Nichteisenlegierungen in Dicken bis herab zu 2,3  $\mu\text{m}$  werden Messungen der komplexen Permeabilität bis zu Frequenzen von etwa 1 MHz durchgeführt. Es wird eine einheitliche Theorie des frequenzproportionalen Anteils des relativen Verlustfaktors entwickelt.

Die gemessenen Verluste werden mit den nach der klassischen Wirbelstromtheorie berechneten verglichen und die Ursachen der festgestellten Abweichungen untersucht. Dabei wird gefunden, daß diese Abweichungen nicht nur, wie bisher meist angenommen wird, auf erhöhte Wirbelstromverluste zurückzuführen sind („Wirbelstromanomalie“), sondern auch auf die Spinrelaxation. Es wird ein Verfahren zur Trennung der Gesamtverluste in Wirbelstrom- und Spinrelaxationsanteil angegeben und auf mehrere Werkstoffe angewandt. Das unterschiedliche Verhalten der einzelnen Werkstoffe wird mit ihrer metallischen und magnetischen Struktur erklärt.

Da mit abnehmender Blechdicke die Wirbelströme zurücktreten und die Frequenzabhängigkeit der Permeabilität mehr und mehr durch die Spinrelaxation bestimmt wird, wird eine neue Grenzfrequenz definiert. Die Messungen zeigen, daß diese Grenzfrequenz mit abnehmender Banddicke im Gegensatz zur klassischen Wirbelstromgrenzfrequenz eindeutig gegen einen Grenzwert strebt, der „Spinrelaxationsgrenzfrequenz“ genannt wird. Dieser stimmt mit der von SNOEK berechneten „gyromagnetischen“ Grenzfrequenz überein, die somit nicht nur für Ferrite, sondern auch für Metalle gilt.

Dies bedeutet, daß man mit Metallen wegen ihrer höheren Sättigung bei hohen Frequenzen höhere Permeabilitäten erzielen kann als mit Ferriten.

Herrn Professor Dr. rer. nat., Dr.-Ing. E. R. FELDTEKLER, TH Stuttgart und Herrn Dr. rer. nat. E. KNELLER, MPI Stuttgart, danke ich herzlich



vielen nützliche Diskussionen und wertvolle Anregungen.  
Herrn Direktor Dr.-Ing. W. DEISINGER und Herrn  
Herrn Dr. nat. F. ASSMUS, Vacuumschmelze AG,  
Hanau, sei für die großzügige Förderung und Unter-  
stützung bei der Durchführung der vorliegenden  
Arbeit gedankt.

**Literatur:** [1] JORDAN, H.: ENT **1**, 7 (1924). — [2] FELD-  
THER, R.: Spulen und Übertrager, Teil 1. Stuttgart:  
Fizel 1949. — [3] FELDTKELLER, R.: Theorie der Spulen und  
Übertrager, 3. Aufl. Stuttgart: S. Hirzel 1958. — [4] BOLL, R.:  
Technische Hochschule Stuttgart 1959. — [5] BOLL, R.:  
Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1959.  
— [6] TIERSON, E., and L. WRATHALL: Proc. Inst. Radio Engrs.  
**55** (1936). — [7] LACHAN, Mc: J. Inst. Electr. Engrs. **54**, 480  
(1934). — [8] VEEHAN, L. W., and R. M. BOZORTH: Phys. Rev.  
**87** (1934). — [9] LEGG, V. E.: Bell Syst. Techn. **J.** **15**, 39  
(1948). — [10] BUTLER, O., and C. Y. MANG: J. Inst. Electr.  
**95**, II, 25 (1948). — [11] LYNCH, A. C.: Post Office  
Communications, 183—90. London: Pergamon Press 1953. — [12]  
FELDTKELLER, R.: FTZ **2**, 9 (1949). — [13] WILLIAMS, H. J.,  
S. C. KITTLE and C. KITTLE: Phys. Rev. **80**, 1090 (1950). —  
[14] POLIVANOV, K. M.: Izv. Akad. Nauk. SSSR., Ser. Fiziki  
**9** (1952). — [15] BROUWER, G.: J. Appl. Phys. **26**, 1297  
(1955). — [16] PRY, R. H., and C. P. BEAN: J. Appl. Phys.  
**22** (1958). — [17] SORGER, G.: Frequenz **8**, 83 (1954). —  
[18] LANDAU, L. u. E. LIFSHITZ: Phys. Z. Sowjet. **8**, 337  
(1948). — [19] DÖRING, W.: Z. Naturforsch. **3a**, 373 (1948). —  
[20] GALT, J. K., J. ANDRUS and H. G. HOPPER: Rev. Mod.  
Phys. **25**, 93 (1953). — [21] GALT, J. K.: Bell Syst. Techn.  
**3**, 1023 (1954). — [22] MENYUK, N., and J. B. GOODE:  
J. Appl. Phys. **26**, 8, 692 (1955). — [23] KITTLE, C.,  
J. K. GALT: Solid State Physics, vol. 3, pp. 437—557.  
New York: Academic Press Publishers 1956. — [24] LEE,  
D.: The Inst. El. Engrs., Monograph Nr. 284 M, Febr.  
1954. — [25] KITTLE, C.: Rev. Mod. Phys. **21**, 541 (1949). —  
[26] MARTIN, D. H.: Proc. Phys. Soc. Lond. B **70**, Part 1,  
45B, 77 (1957). — [27] RICHARDS, C. E., E. V. WALKER  
and A. C. LYNCH: Proc. Inst. Electr. Engrs., Part B, **104**, 343

(1957). — [28] GANZ, A.: Electr. Engng. **65**, 177 (1946). —  
[29] LITTMANN, M. F.: Electr. Engng. **71**, 792 (1952). —  
[30] LITTMANN, M. F., and C. E. WARD: J. Appl. Phys. **30**, 213  
(1959). — [31] EPELBOIN, I.: Rev. Metall. **49**, 863 (1952). — [32]  
BLOIS jr., M. S.: J. Appl. Phys. **26**, 975 (1955). — [33] COLOM-  
BANT, A.: J. Phys. Radium **17**, 263 (1956). — [34] REIMER, L.:  
Z. Naturforsch. **11a**, 611, 649 (1956); **12a**, 550, 558, 1014 (1957). —  
[35] MAYER, H.: Metalloberfläche **12**, 257 (1958). — [36] KOH,  
P. K.: J. Appl. Phys. **29**, 636 (1958). — [37] HOUDREMONTE, E.,  
K. JANSEN, G. SOMMERKORN u. H. FAHLENBRACH: Techn.  
Mitt. Krupp **15**, 13 (1957). — [38] SCHMID, E., u. H. THOMAS:  
Z. Metallkde. **41**, 45 (1950). — [39] DAHL, O., u. I. PFAFFEN-  
BERGER: Z. Physik **71**, 93 (1931). — [40] ABGRALL, C., et  
I. EPELBOIN: C. R. Acad. Sci., Paris **234**, 1265 (1952). —  
[41] PRY, P. H., and J. J. BECKER: Congr. Internat. sur la  
physique de l'état solide ..., Brüssel 1958; Résumés des  
communications, 60. — [42] LEE, E. W.: Proc. Phys. Soc.  
Lond. **72**, 596 (1958). — [43] BATES, L. F., and A. HART:  
Proc. Phys. Soc. Lond. A **66**, 813 (1953). — [44] PARKIN,  
B. G.: Discussion in Soft Magnetic Materials for Telecommu-  
nications. 319. London: Pergamon Press 1953. — [45] Firmen-  
blatt M 005, 2. Ausgabe, „Zwergkerne“. Hanau: Vacuumschmelze AG 1959. — [46] WILLIAMS, H. J.: Phys. Rev. **71**,  
646 (1947). — [47] NEURATH, P. W.: J. Appl. Phys. **30**, 88  
(1959). — [48] ASSMUS, F.: Berichte der Arbeitsgemeinschaft  
Ferromagnetismus, S. 108—110. Stuttgart: Dr. Riederer-  
Verlag 1958. — [49] WOLMAN, R.: Z. techn. Phys. **10**, 595  
(1929). — [50] FELDTKELLER, R., u. O. KOLB: Z. angew. Phys.  
**4**, 448 (1952). — [51] SMIT, J., and H. P. I. WIJN: Advances  
in Electronics and Electron Physics, vol. VI, pp. 69—136.  
New York: Academic Press Inc. Publishers 1954. — [52] KÖH-  
LER, D.: Diss. TH Stuttgart 1958. — Arch. elektr. Übertra-  
gung **13**, 1 (1959). — Z. angew. Phys. **11**, 103 (1959). — [53]  
KITTLE, C.: Phys. Rev. **70**, 281 (1946). — [54] BOLL, R.:  
Frequenz **14**, (1960). — [55] SNOEK, J. L.: Nature, Lond.  
**160**, 90 (1947). — [56] KORNETZKI, M.: Z. angew. Phys. **3**,  
227 (1951). — [57] KORNETZKI, M.: VDE-Fachber. **16**, 135  
(1952). — [58] SNOEK, J. L.: Physica, Haag **14**, 207 (1948). —  
[59] RADO, G. T.: Rev. Mod. Phys. **25**, 81 (1953). — [60]  
GANS, R.: Ann. Phys. **15**, 28 (1932).

Dr. RICHARD BOLL, Vacuumschmelze AG, Hanau

## Über dynamische Eigenschaften von Xenon-Hochdruckbögen \*

VON HANS-JÜRGEN HENTSCHEL

Mit 13 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Dezember 1959)

Als dynamische Eigenschaften eines Xenon-Hoch-  
druckbogens bezeichnen wir solche, die bei der Modu-  
lation eines Gleichstrombogens mittels Wechselströ-  
me höherer Frequenz hervortreten. Im Gegensatz  
zu den statischen Eigenschaften, die das Ver-  
halten des Bogens bei Gleichstrom oder teilweise  
Wechselstrom niedriger Frequenz (50 Hz) bestimmen,  
sind die dynamischen Eigenschaften weitgehend  
bisher unbekannt.

Mit der Modulation der Quecksilberhochdruckent-  
ladung beschäftigt sich ausführlich H. MANGOLD [1],  
von ihm benutzte Apparatur diente teilweise als  
Mittel für die im folgenden beschriebene Anordnung.  
MANGOLD geht bei seinen Messungen von der Be-  
nutzung mit der sog. „Lichttelefonie“ aus, wäh-  
rend weitere Anregungen insbesondere für die vor-  
liegende Arbeit aus der Kinetik kommen. Hier  
versucht, durch einen Impulsbetrieb [2], [3] der  
Bogen den Nutzlichtstrom in der Kinoprojektion zu

verbessern. Schließlich sind noch Arbeiten über die  
dynamischen Charakteristiken von Quecksilberhoch-  
drucklampen [4], [5] sowie über das Verhalten eines  
Plasmas bei schnellen Zustandsänderungen [6] zu  
nennen.

### Versuchsanordnung

Um einen Xenon-Hochdruckbogen zu modulieren,  
wird der Bogen zunächst mit Gleichstrom betrieben.  
In einer Schaltung, die der von MANGOLD [1] bei  
Quecksilberhochdrucklampen verwendeten entspricht,  
wird dem Bogen sodann ein Wechselstrom variabler  
Größe und Frequenz überlagert. Abb. 1 zeigt ein  
schematisches Bild der Anordnung:

Die Lampe  $L$  wird von der Gleichstromquelle über  
ein Amperemeter zur Messung des Gleichstroms  $i_0$ ,  
über einen Regelwiderstand  $R$  und eine Drosselspule  
 $Dr$  gespeist. Dem Gleichstrom wird über ein Ampere-  
meter zur Messung des Modulationsstromes  $i_m$  und  
einen Kondensator  $C$  ein Wechselstrom überlagert.  
Dabei verhindert der Kondensator, daß ein Teil des

\*Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Maschinen-  
bau an der Technischen Hochschule Karlsruhe genehmigten  
Arbeit.

Gleichstroms über die Wechselstromquelle fließt, während andererseits eine Belastung der Gleichstromquelle mit einem Teil des Wechselstroms durch die Drossel vermieden wird. In den Wechselstromkreis ist ferner noch ein induktionsarmer Meßwiderstand  $R_m$  eingebaut, mit dessen Hilfe der Momentanwert des Wechselstroms gemessen werden kann. Zur Erzeugung des Wechselstroms dient ein RC-Generator, dessen

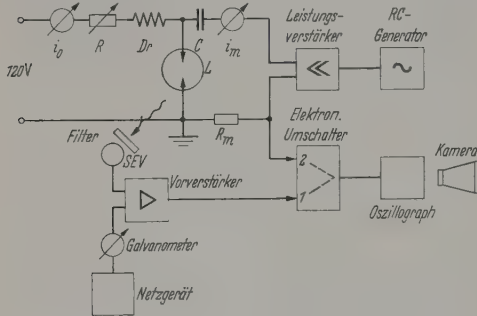


Abb. 1. Schema der Modulationsschaltung

Schwingungen durch einen Leistungsverstärker bis zu Leistungen von 200 W verstärkt werden können. Neben der Anlage zum Modulationsbetrieb der Xenon-Lampe sind weitere Schaltungselemente erforderlich, um Strom, Spannung und Strahlung nach Amplitude und Phasenlage messen zu können: Der Strom wurde

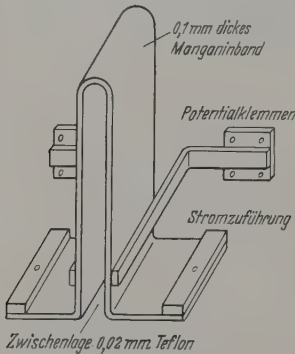


Abb. 2. Meßwiderstand

in der Weise gemessen, daß die am Meßwiderstand  $R_m$  abfallende Spannung einem Elektronenstrahloszillographen über einen elektronischen Umschalter zugeführt wurde. Dieser ermöglichte den Vergleich mit einer zweiten Meßgröße, deren Phasenlage relativ zum Strom somit festgelegt werden konnte.

Die infolge der Modulation an der Lampe entstehende Spannung wurde direkt an den Elektroden abgenommen und durch praktisch leistungslose Messung eine Verfälschung der Meßwerte vermieden. Führt man die Spannung beispielsweise dem zweiten Eingang des elektronischen Umschalters zu, so konnten Kurvenform, Amplitude und Phasenlage relativ zum Strom auf dem Oszillographen sichtbar gemacht werden.

Die Emission des Bogens wurde mittels einer Vervielfacher-Photozelle (SEV) gemessen. Der Photostrom setzte sich aus einer dem Mittelwert der Strah-

lung entsprechenden Gleichstromkomponente und einer dem modulierten Strahlungsanteil entsprechenden Wechselstromkomponente zusammen. Zur Messung der Gleichstromkomponente dienten ein Galvanometer und für die letztere ein Vorverstärker. Der Ausgang des Vorverstärkers war mit dem zweiten Eingang des elektronischen Umschalters verbunden, um den Vergleich der Phasenlage der modulierten Strahlung mit der Stromphase zu ermöglichen. Die Amplitude wurde ebenfalls aus dem Oszillogramm oder durch Direktablesung an der mit dem Bildschirm verbundenen Skala bestimmt. Durch geeignete optische Abbildung konnte entweder die Strahlung aus dem gesamten Bogen (bei abgeschalteten Elektroden) oder aus einzelnen Bogenteilen gemessen werden. Dabei dienten geeignete Filter zur Untersuchung verschiedener Spektralbereiche.

**Modulationsstromkreis.** Die für die Erzeugung des Modulationsstromes notwendigen Schaltelemente, RC-Generator und Leistungsverstärker, wurden besonders für diesen Zweck entwickelt. Der RC-Generator besaß vier dekadisch abgestufte Frequenzbereiche von 100 Hz bis 1 MHz, die Amplitude und Sinusform der erzeugten Spannung wurde durch einen NTC-Heißleiterwiderstand im Oszillatorteil konstant gehalten. Der nachgeschaltete Leistungsverstärker war mit einer Endstufe aus zwei im Gegentakt arbeitenden Sendeleistungsrohren PE 1/100 ausgestattet. Die Anpassung an den sehr niedrigen Wechselstromwiderstand der Xenon-Hochdrucklampen wurde mittels eines Ausgangsübertragers erreicht. Der Frequenzbereich erstreckte sich von 50 Hz bis etwa 25 kHz, der Bereich der Modulationsstromstärken von 0 bis 6 Amp.

Der Modulationsstrom wurde mit einem thermoelektrischen Amperemeter ( $i_m$  in Abb. 1) gemessen. Der Kondensator  $C$  bestand aus Elektrolytkondensatoren mit einer Kapazität von insgesamt 1000  $\mu\text{F}$  und MP-Kondensatoren von insgesamt 42  $\mu\text{F}$  für die höheren Frequenzen. Die symmetrisch in den Zuleitungen des Gleichstromkreises liegenden Drosseln ( $D_r$  in Abb. 1) besaßen eine Induktivität von 0,2 H. Damit ergab sich ein über die Batterie fließender Wechselstromanteil von weniger als 1% des Modulationsstromes bei einer Frequenz von 100 Hz.

An den Strommeßwiderstand ( $R_m$  in Abb. 1) waren hohe Anforderungen zu stellen, wenn eine dem Strom nach Amplitude und Phase entsprechende Spannung unabhängig von der Frequenz abgegriffen werden sollte. Wegen der Größe der zu messenden Ströme schiedenen übliche Formen mit bifilar geführtem Draht aus. Von L. KANACHER [7] wurde schließlich ein aus Manganinband hergestellter Widerstand berechnet und ausgeführt, der folgende Daten aufwies (s. auch Abb. 2): Ein etwa 80 mm breites und 870 mm langes Manganinband der Stärke 0,10 mm wurde U-förmig mit einer Zwischenlage von 0,02 mm starken Teflonblechen gefaltet. Die Stromzuführungen bestanden aus an den Enden des Bandes aufgeschraubten Messingklötzen, während die im bifilar geführten Teil des Manganinbandes gelegenen Potentialabgriffe aus über die ganze Breite angelöteten Messingbändern bestanden. Die Länge des Bandes zwischen den Potentialabgriffen war auf einen Widerstand von 0,100  $\Omega$  abgepaßt. Es ergab sich für die Induktivität der zwischen den Abgriffen liegenden U-Schleife ein Wert, der in der Größenordnung von  $1 \cdot 10^{-8}$  H oder darunter lag.



bleibt der Phasenfehler der Stromregistrierung 2 kHz unterhalb von 1°. Fehler bei der Phasenregistrierung waren daher nur noch in Übertragungsselektoren wie dem elektronischen Umschalter oder dem Graphenverstärker zu suchen.

**Strahlungsmessung.** Für die Strahlungsmessung wegen der geforderten Trägheitslosigkeit bei geringer Bandbreite nur eine Vervielfacher-Photokathode (SEV) in Frage. Als solche wählten wir eine mit ultravioletten und ultraroten Spektralbereich empfindliche Cs-Kathode Typ Vp 690 A von MAURER aus. Für Meßzwecke die Stufenspannungen am SEV konstant sein mußten, wurde ein Netzgerät mit einer Stabilisierung der Spannungen durch Glühbirnen verwendet.

Da die der modulierten Strahlung entsprechenden Stromschwankungen messen zu können, war ein häufiger Vorverstärker erforderlich, dessen Ausgangsspannung sehr niedrigohmig ausgebildet war, um die richtige Übertragung der Photowechselspannung durch ein längeres abgeschirmtes Kabel zum elektronischen Umschalter zu gewährleisten. Der Wert des Photostromes wurde durch ein in die Schaltung zur Anode geschaltetes Galvanometer gemessen, das mit einer Empfindlichkeitsregelung und einer Einrichtung zur Kompensation des thermischen Photostromes ausgerüstet war. Zur Bestimmung der Phase der Modulation der Strahlung im Vergleich mit dem Mittelwert der Strahlung diente ein rotierender Sektor, der bei gleichstrombetriebener Lampe 1000mal pro Sekunde den Strahlengang unterbrach. Die auf dem Oszillographenschirm sichtbar werdende rechteckige Photospaltung entspricht damit dem bei geöffneten Sektor abgelesenen Galvanometerausschlag.

Die Phase des Phasenfehlers in der Registrierung der Photowechselspannung gegen die Phase des Modulationsstromes wurden mit folgender Anordnung gemessen (s. Abb. 3): Das Licht der in diesem Fall modulierten Xenonlampe durchsetzte eine mit eukalyptenholzgefüllte Polarimeterröhre, die zwischen fast gekreuzten Nikols befand, um dann auf die Photokathode des SEV aufzutreffen. Ein durch eine Spule erzeugtes longitudinales Magnetfeld veränderte eine Aufhellung oder Verdunkelung je nach Richtung des Feldes (Faraday-Effekt). Der Spulenkern wurde dem Leistungsverstärker entnommen. Der Faraday-Effekt praktisch trägheitsfrei verwendet und die Messung von Spulenstrom und Photostrom in der genau gleichen Weise, wie bei den Modulationsmessungen geschah, mußte eine im Oszillogramm beobachtete Phasendifferenz zwischen Spulenstrom und Licht dem gesamten Phasenfehler zwischen Strom und Licht bei modulierter Lampe entsprechen. Ergebnis von Kontrollmessungen mit dieser Methode zeigte, daß die Kombination des SEV mit dem Leistungsverstärker im untersuchten Frequenzbereich trägheitsfrei arbeitete und Phasenfehler nur durch den Meßwiderstand eingeführt wurden.

**Optische Anordnung.** Ein Kondensor entwarf zuerst ein Zwischenbild des Bogens, in dem die Elektroden ausgeblendet wurden. Ein Objektiv diente zur Bildbildung entweder des Zwischenbildes oder der Kontrastapertur auf dem Vervielfacher, je nachdem ob die Strahlung aus einzelnen Bogenanteilen oder die Gesamtstrahlung aus dem gesamten Bogen untersucht

werden sollte. Im ersten Falle war das Bogenbild 50fach vergrößert. Ein kleiner Teil des Bogenbildes wurde durch einen vor der Kathode angebrachten Schirm mit kleiner quadratischer Öffnung ausgeblendet, zur Bewegung des Bogenbildes in Richtung der Bogenachse sowie senkrecht dazu dienten Mikrometerschrauben mit Teilung, die die Lampenfassung meßbar verschoben.

Bei der Strahlung der Xenon-Hochdrucklampe ist zwischen der Kontinuums- und Linienstrahlung zu unterscheiden [8]. Zwei Farbfilter waren für die Untersuchung beider Anteile vorgesehen:

Das Kontinuum des Xenonhochdruckbogens ist im sichtbaren Spektralgebiet fast linienfrei, eine schwächere Liniengruppe um 4697 Å tritt über einem starken Kontinuum auf. Da außerdem die relative

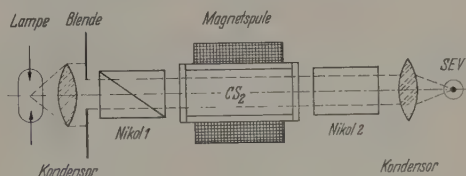


Abb. 3. Anordnung zur trägheitslosen Modulation des Lichtes

spektrale Energieverteilung des Kontinuums auch bei sehr starken Belastungsschwankungen praktisch konstant bleibt [9], bewertet ein an die relative spektrale Augenempfindlichkeit ( $V_\lambda$ ) angepaßter Empfänger sowohl das Verhalten des Kontinuums als auch die lichttechnischen Größen wie Lichtstärke und Leuchtdichte des Bogens richtig. Als Filter wurde daher für das Kontinuum eine Glasfilterkombination gewählt, die die Empfindlichkeit der Cs-Photokathode rechnerisch an  $V_\lambda$  anglich.

Die Abhängigkeit der Linienstrahlung von den Modulationsparametern wurde am Beispiel der Linien 8231/8280 Å ermittelt. Beide Linien sind in der Hochdruckentladung wegen der Druckverbreiterung nicht zu trennen, sie gehen aber zwischen eng benachbarten Termen über, so daß ähnliche Anregungsbedingungen zu erwarten sind. Zur Isolierung der Liniengruppe diente ein Interferenzfilter, dessen Durchlaßkurve mittels eines Spektralphotometers mit Doppelmonochromator von Zeiss gemessen wurde. Der Anteil der nächsten Linie 8346 Å betrug danach nur noch einige Prozent.

#### Dynamische Eigenschaften der Xenon-Hochdruckbögen

**Daten der untersuchten Bögen.** Die untersuchten Bögen waren stets konvektionsstabilisierte Entladungen in Xenon von hohem Druck, wie sie zuerst von P. SCHULZ beschrieben wurden [8]. Der Bogen brennt zwischen Wolframelektroden in einem mit Xenon gefüllten Quarzgefäß, in dem ein Betriebsdruck von etwa 25 at herrscht. Der Elektrodenabstand beträgt einige Millimeter. Die Entladung wird durch einen Hochspannungsimpuls gezündet und erreicht praktisch augenblicklich ihren Betriebszustand. Der Bogen emittiert neben Linien, die besonders im nahen Ultrarot stark hervortreten, ein kräftiges Kontinuum, dessen relative spektrale Energieverteilung der eines schwarzen Strahlers von etwa 6000° K Temperatur entspricht. Bemerkenswert ist ihre sehr

geringe Abhängigkeit von der Belastung der Lampe [9], die wir schon oben erwähnten. Speziell wurden Xenon-Hochdrucklampen des Typs XBO 162 untersucht, die freundlicherweise von der Osram-GmbH zur

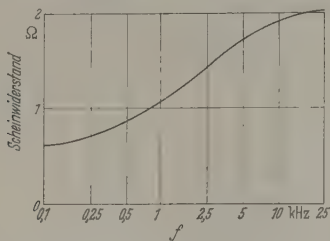


Abb. 4. Scheinwiderstand der modulierten XBO 162 in Abhängigkeit von der Frequenz

Verfügung gestellt wurden, wofür an dieser Stelle gedankt sei. Die mittleren Betriebsdaten dieser Lampentype sind: Strom 7,5 Amp, Bogenlänge

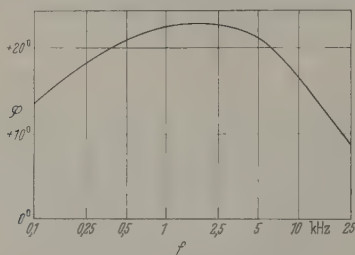


Abb. 5. Phasenverschiebung der Spannung gegenüber dem Strom bei einer XBO 162

21 V, Leistung 160 W, Bogenlänge 2,2 mm, Lichtstärke senkrecht zur Achse 330 cd und Lichtstrom 3200 lm. Zwischen der Lichtstärke  $I$ , die vorwiegend

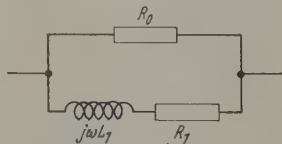


Abb. 6. Ersatzschaltbild des Hochdruckbogens bei Modulation

durch das Kontinuum im sichtbaren Spektralgebiet bestimmt wird, und der Stromstärke  $i$  besteht näherungsweise der Zusammenhang

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{i}{i_0} \right)^n, \quad (1)$$

worin der Index 0 auf die Bezugsgröße hinweist.  $n$  hat in unserem Falle etwa den Wert 1,5.

**Modulationsgrößen.** Zur Kennzeichnung der Stärke der Modulation wird der „Modulationsgrad“  $m$  verwendet, wie er auch von MANGOLD [1] benutzt wird: Ist  $G$  die modulierte Größe,  $G_{\max}$  ihr Maximalwert,  $G_{\min}$  ihr Minimalwert, so gilt

$$m = \frac{G_{\max} - G_{\min}}{G_{\max} + G_{\min}}. \quad (2)$$

Bei symmetrischem Verlauf von  $G$  um den Mittel- (Gleichstrom-)Wert  $G_m$  geht (2) über in:

$$m = \frac{G_{\max} - G_{\min}}{2 \cdot G_m}. \quad (3)$$

(3) gilt insbesondere auch für sinusförmigen Verlauf der betreffenden Größe. Wenden wir den Begriff des Modulationsgrades  $m$  auf den Strom an, so erhalten wir den Strommodulationsgrad  $m_i$  nach (3) zu

$$m_i = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{2 \cdot i_0} = \frac{\sqrt{2} \cdot i_{\text{Mod}}}{i_0}. \quad (4)$$

In (4) ist  $i_0$  der Gleichstromwert und  $i_{\text{Mod}}$  der Effektivwert des Modulationswechselstroms. Das modulierte Licht des Xenonhochdruckbogens verläuft bei sinusförmigem Verlauf des Modulationsstromes wegen der auch bei niedrigen Frequenzen noch gültigen Beziehung (1) im allgemeinen nicht sinusförmig, so daß hierauf (2) anzuwenden ist. Der „Lichtmodulationsgrad“  $m_l$  wird daher durch

$$m_l = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (5)$$

gegeben. Aus (5) und (1) kann unter Benutzung von (4) eine Beziehung zwischen  $m_l$  und  $m_i$  hergeleitet werden:

$$n \approx \frac{m_l}{m_i} \quad (6)$$

(6) gilt mit hinreichender Genauigkeit für Werte von  $n \leq 1,5$  und  $m_i < 50\%$ . Auf die praktische Bedeutung von (6) werden wir noch einzugehen haben.

**Elektrische Eigenschaften des modulierten Bogens.** Die elektrischen Eigenschaften des modulierten Bogens werden bei sehr niedrigen Frequenzen beschrieben durch die statische Strom-Spannungskennlinie, die in der Umgebung des Nennstromes von 7,5 Amp linear verläuft. Der Wechselstromwiderstand für sehr niedrige Frequenzen ergibt sich aus der Tangente an die Kennlinie im Arbeitspunkt für die XBO 162 zu 0,44  $\Omega$ . Beim Übergang zu höheren Frequenzen zeigt der Bogen ein induktives Verhalten mit frequenzabhängiger Induktivität. Bei Strommodulationsgraden unterhalb 50% läßt sich das Verhältnis zwischen den Beträgen von Spannung und Strom unabhängig vom Strom durch den Wert des Scheinwiderstandes ausdrücken; wie er für eine XBO 162 in Abhängigkeit von der Frequenz in Abb. 4 dargestellt ist. Die Modulationsspannung eilt dem Modulationsstrom um Phasenwinkel voraus, die in Abb. 5 dargestellt sind. Bei gleichem Modulationsstrom steigt somit die Modulationsspannung mit der Frequenz und damit auch nach Berücksichtigung des abnehmenden Leistungsfaktors  $\cos \varphi$  die Modulationsleistung von etwa 2% bei 100 Hz bis auf 7% der Gleichstromleistung bei 25 kHz und  $m_i = 45\%$ .

Das Verhalten des Bogens kann durch ein von WEIZEL, ROMPE und SCHULZ [10] für den modulierten Quecksilber-Hochdruckbogen angegebenes Ersatzschaltbild beschrieben werden. In Abb. 6 sind  $R_0$  der Gleichstromwiderstand,  $R_1$  der Wirkanteil und  $j\omega L_1$  der Blindanteil des Wechselstromwiderstandes mit  $j$  als imaginärer Einheit und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Modulation. Mit Hilfe des Ersatzschaltbildes und der Werte von Scheinwiderstand und Phasenverschiebung lassen sich die Größen  $R_1$  und  $j\omega L_1$  in Abhängigkeit von der Frequenz berechnen. Das Ergebnis weist in einigen Zügen Ähnlichkeit mit den Resultaten auf, die MANGOLD [1] an Quecksilber-Hochdrucklampen gefunden hat. Nach den theoretischen Überlegungen von WEIZEL, ROMPE



SCHÜLZ [10] ist für das induktive Verhalten die Induktivität des Entladungskanals und die Wärmeableitung in den umgebenden Gasmantel verantwortlich. Zur Frage der Wärmeableitung — für die die „Wärmewelle“ angenommen wird — ist später noch einiges zu bemerken.

**Die Eigenschaften der modulierten Strahlung.** Je nach der optischen Abbildung geben die Strahlungsmessungen Aufschluß über das Verhalten der Strahlung des gesamten Bogens im Mittel oder derjenigen einzelner Bogenteile. Neben dieser Unterscheidung ist die Strahlung des Kontinuums und die der Linien bei 8231/8280 Å — wie oben erwähnt — getrennt zu betrachten. Es zeigte sich jedoch, daß die Linienstrahlung sich prinzipiell nicht anders als die Kontinuumsstrahlung verhält. Insbesondere sind die Phasenverschiebungen gleich groß, die Amplitude der modulierten Strahlung ist bei den Linien kleiner, verläuft aber qualitativ ganz analog mit der Frequenz der Modulation. Im folgenden werden wir uns hauptsächlich mit dem Kontinuum behandeln.

Bei der Darstellung der Ergebnisse können wir — ohne wesentliches zu vernachlässigen — weiter stark vereinfachen und zunächst die modulierte Strahlung des Gesamtbogens als Mittel aus der Strahlung einzelner Bogenteile darstellen, womit das Verhalten der Strahlung am meisten beteiligten Teile der Kathoden-Säule außerhalb des Gebietes vor der Kathode ebenfalls charakterisiert ist. Die Strahlung aus der sog. „Plasmakugel“, einer Zone erhöhter Temperatur und Leistungskonzentration unmittelbar vor der Kathode, muß dagegen wegen ihres andersartigen Verhaltens gesondert betrachtet werden.

**Das mittlere Verhalten der modulierten Strahlung.** Modulationsmessungen wurden bei drei verschiedenen Strommodulationsgraden  $m_i$  (15, 30 und 45 %) durchgeführt. Nach Gl. (6) ist zu erwarten, daß zumindest bei den niedrigsten Frequenzen um 100 Hz der Lichtmodulationsgrad  $m_l$  proportional zum Strommodulationsgrad steigt. Das wurde bestätigt, ferner zeigte sich, daß  $m_l$  auch bei wachsender Frequenz bis 10 kHz näherungsweise proportional zu  $m_i$  bleibt. Das Verhalten der Amplitude der modulierten Strahlung wird daher unabhängig von der Strommodulation nach dem Verlauf von  $m_l/m_i$  über der Frequenz beschrieben (s. Abb. 7).

Bei niedrigen Frequenzen nimmt  $m_l/m_i$  etwa den Wert von  $n$  an, Differenzen können dadurch erklärt werden, daß bei der Modulation im Gegensatz zum stationären Betrieb nur der Entladungskanal den Stromschwankungen folgt, während Temperatur und Druck im Gasmantel, Elektroden- und Wandtemperatur infolge der größeren Zeitkonstante von etwa 10<sup>-5</sup> sec konstant bleiben. Mit steigender Frequenz verläuft  $m_l/m_i$  ein flaches Maximum, um dann innerhalb 1 kHz bis auf einen Wert von etwa 0,6 abzunehmen. Einen anderen Verlauf zeigt die Amplitude der Strahlung aus der Plasmakugel. Das Maximum von  $m_l/m_i$  liegt hier bei 5 kHz, ein stärkerer Abfall erst bei Modulationsfrequenzen von über 25 kHz zu erwarten.

Einen Überblick über das Verhalten der Phase der modulierten Strahlung bezogen auf die Stromphase gewinnen wir ebenfalls durch Betrachtung der mittleren Strahlung des Bogens und der Plasmakugel. Der Phasenwinkel der mittleren Bogenstrahlung ent-

spricht bei 100 und 200 Hz einem Voreilen vor dem Strom, mit wachsender Frequenz nimmt der Phasenwinkel ab und geht im untersuchten Frequenzbereich schließlich zu beträchtlichen negativen Werten, die

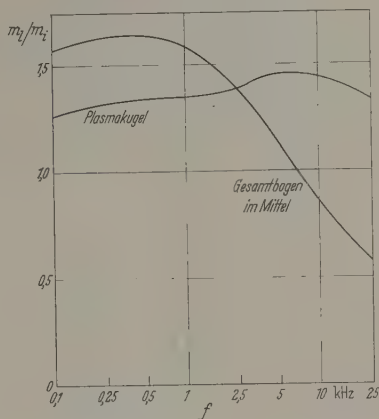


Abb. 7.  $m_l/m_i$  für das Kontinuum einer XBO 162

einer Verzögerung der Strahlung entsprechen, über (s. Abb. 8a). Rechnet man jedoch in Zeitmaß um, so wird ein Maximum der Verzögerung mit etwa  $3 \times 10^{-5}$  sec bei etwa 1 kHz beobachtet (s. Abb. 8b). Im

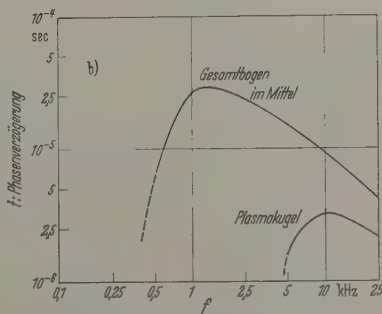
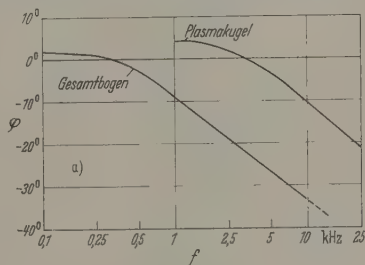


Abb. 8a u. b. Phasenverschiebung der Strahlung gegenüber dem Modulationsstrom

Gegensatz dazu ist die maximale Verzögerung der Strahlung der Plasmakugel gegenüber dem Strom mit  $3 \cdot 10^{-6}$  sec bei 10 kHz sehr viel kleiner. Bei diesen Betrachtungen beziehen wir uns auf die Strahlungsmaxima, die Minima zeigen ähnlichen Verlauf, sind aber etwas stärker verzögert.

Das Voreilen der Strahlung bei niedrigen Frequenzen wird aus dem induktiven Verhalten des Bogens erklärt. Die Spannung eilt ebenfalls dem Strom um

einen Betrag voraus, der größer als der der Strahlung ist. Damit eilt auch das Maximum der Momentanleistung dem Strommaximum voraus, es konnte nicht beobachtet werden, daß das Strahlungsmaximum etwa dem Leistungsmaximum vorgeeilt wäre. Die Strahlung folgt in jedem Falle der Leistung und ist bestenfalls nur unmerklich gegenüber dieser verzögert.

Der weitere Verlauf wird von WEIZEL, ROMPE und SCHULZ [10] in folgender Weise gedeutet: Der auf die Amplitude der Temperaturschwankung bei der Modulation ausgleichend wirkende Einfluß der Wärmekapazität und der nichtstationären Wärmeableitung des

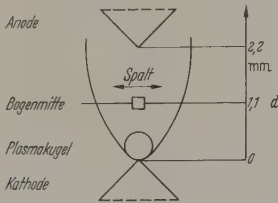


Abb. 9. Zur Strahlungsmessung an einzelnen Bogenteilen

Bogenkanals nimmt mit der Frequenz zu und macht sich um so stärker bemerkbar, je geringer die Leistungskonzentration im Volumelement ist. Da die Leistungskonzentration in der Plasmakugel etwa 10mal größer ist als in den anderen Bogenteilen, wie

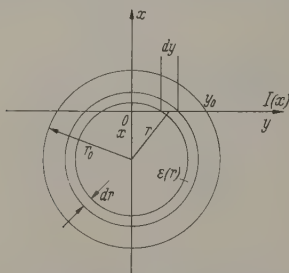


Abb. 10. Zur Ermittlung des Emissionskoeffizienten  $\varepsilon(r)$  bei Strahlung aus inhomogener Schicht

aus Leuchtdichtemessungen geschlossen wird, macht sich dort dieser ausgleichende Einfluß erst bei höheren Frequenzen bemerkbar, wie der Vergleich mit den Meßergebnissen an anderen Bogenteilen zeigt. Neben der Abnahme der Amplitude des modulierten Lichtes als unmittelbare Folge der Abnahme der Temperaturamplitude tritt ferner eine Verzögerung der Maxima und Minima der Strahlung gegenüber den Strommaxima und -minima auf, deren Größenordnung nach WEIZEL und ROMPE [11] — wie auch von ROMPE und ROTHER [6] kürzlich bestätigt — durch die Wärmeleitung und Einstellung der Temperaturverteilung der schweren Gaskomponenten gegeben ist. Die Relaxationszeiten der Elektronentemperatur, Ionen- und Anregungstemperatur liegen unterhalb von  $10^{-6}$  bis  $10^{-7}$  sec weit unter den beobachteten Verzögerungen, der Ausgleich zwischen Elektronen- und Atomtemperatur geschieht ebenfalls innerhalb von  $10^{-6}$  sec, so daß die letztgenannten Effekte bei den untersuchten Frequenzen nicht zur Deutung herangezogen werden.

Überblick über das Modulationsverhalten einzelner Bogenteile: Das oben skizzierte Verhalten der mittleren Bogenstrahlung gibt annähernd auch die Werte von

Amplitude und Phase für die Bogenmitte wieder, das Verhalten der Plasmakugel hatten wir davon besonders unterschieden. Weitere aufschlußreiche Meßwerte liefern Messungen außerhalb der Bogenachse in einem in der Bogenmitte liegenden Querschnitt. In Abb. 9 ist die Verschiebung des Meßspaltes durch das Bogenbild in Richtung  $x$  dargestellt. Wegen der Bogensymmetrie werden dabei rechts und links der Achse erhaltene Werte gemittelt. Die Breite des scharf begrenzten Bogens zeigt bei Modulationsbetrieb ein gegenüber dem Gleichstrombetrieb abweichendes Verhalten: Trotz des konstanten Strommittelwerts, der eine konstante Bogenbreite auch bei Modulation erwarten läßt, verbreitert sich der Bogen bei 100 Hz, bei mittleren Frequenzen bleibt die Breite ungeändert gegenüber dem Gleichstrombetrieb, bei 10 kHz wird eine deutliche Kontraktion bei der Modulation beobachtet. Letztere erklärt infolge einer Erhöhung der Leistungskonzentration auch die beobachtete Steigerung der Lichtausbeute mit der Modulation bei höheren Frequenzen.

Bei der Auswertung der Verteilungsmessungen ist zu berücksichtigen, daß der Kanal aus zylindrischen Schichten verschiedener Temperatur besteht und die in Abhängigkeit von  $x$  erhaltenen Meßwerte  $I(x)$  Mittelwerte aus inhomogener Schicht sind. In Abb. 10 ist dies schematisch angedeutet. In der Beobachtungsrichtung  $y$  im Abstand  $x$  von der Bogenachse entspricht der Meßwert  $I(x)$  dem Mittel aus den Beiträgen verschiedener Schichten der Dicke  $dy$  mit den Abständen  $x \leq r \leq r_0$  von der Achse und dem Emissionskoeffizienten  $\varepsilon(r)$ . Unter der Voraussetzung, daß die Schichten optisch dünn sind — wie das für die XBO 162 in Bogenmitte zutrifft — erhält man die Integralsgleichung.

$$I(x) = 2 \int_{r=x}^{r_0} \frac{\varepsilon(r) r dr}{r^2 - x^2} \quad (7)$$

Gl. (7) läßt sich beispielsweise nach dem von HÖRMANN [12] angegebenen Verfahren numerisch integrieren und aus dem gemessenen Verlauf von  $I(x)$  derjenige von  $\varepsilon(r)$  ermitteln.  $I(x)$  wurde zunächst bei stationärem Betrieb gemessen und das zugehörige  $\varepsilon(r)$  berechnet. Für das Kontinuum als Rekombinationskontinuum geht man von der Saha-Gleichung, für die Linienstrahlung vom Boltzmann-Prinzip aus, um den Zusammenhang der relativen Temperaturverteilung  $T(r)$  mit der Strahlungsverteilung  $\varepsilon(r)$  herzustellen. Der Anschluß an die absolute Temperatur wurde unter Benutzung von Werten der elektrischen Leitfähigkeit nach BAUER und SCHULZ [13] und einer Abschätzung des Gradienten in Bogenmitte durch Integration über die Stromdichteverteilung erreicht, die den Wert des Bogenstroms ergeben mußte. Ergänzt wurde diese Bestimmung durch die Abschätzung der Temperatur aus der Leuchtdichte nach LARCHE [14]. Die Temperaturverteilung zeigt Abb. 11, die besitzt den Charakter eines scharf begrenzten Kanals mit einer Achsentemperatur von 7860° K. Hieraus wurden weitere Daten für die Auswertung der im folgenden beschriebenen Messungen gewonnen.

Die Modulationsmessungen in Abhängigkeit vom Achsenabstand wurden für einen Strommodulationsgrad  $m_i = 15\%$  und die Kontinuumstrahlung durchgeführt, die Amplitude wird daher in Abb. 12 direkt



Form des Lichtmodulationsgrades  $m_l$  dargestellt. Abb. 12 bezieht sich auf die im Abstand  $x$  gewonnenen Werte aus inhomogener Schicht. Durch die noch entsprechende Zeitabhängigkeit wird die Umrechnung von Modulationsgrößen auf das Volumenelement mit Abstand  $r$  — zu der im Prinzip (7) angewendet — wesentlich umständlicher. Die genaue Behandlung, die für 100 Hz im einzelnen ausgeführt wurde, ergibt jedoch einen von Abb. 12 nur geringfügig abweichenden Verlauf, so daß man hier auf die Darstellung über  $r$  verzichten kann. Ähnliches gilt auch für die Darstellung der Phase der modulierten Strahlung (Abb. 13), die durch die Mittelwertbildung in der inhomogenen Schicht in der Darstellung über  $r$  Bogenmitte hin flacher ist als diejenige über  $x$ . Am Bogenrand gehen beide Verteilungen ineinander über.

Für das Verhalten der modulierten Strahlung in Abhängigkeit vom Achsenabstand lassen sich aus den Kurvenscharen von Abb. 12 und 13 folgende Schlüsse ziehen:

Der Lichtmodulationsgrad  $m_l$  ist bei niedrigen Frequenzen in der Nähe der Bogenachse zunächst konstant, um dann zum Bogenrand hin anzusteigen. Diese Erscheinung ist bei 100 Hz am stärksten ausgeprägt und nimmt mit steigender Frequenz ab. Bei Frequenzen über 2,5 kHz wird  $m_l$  über die ganze Bogenbreite konstant.

Die Strahlung eilt in ihrer Phase  $\varphi$  bei niedrigen Frequenzen dem Strom in der Bogenachse voraus. Mit wachsendem Achsenabstand wird sie mehr und mehr um beträchtliche Werte verzögert. Bei steigender Frequenz wird der Verlauf flacher, nur ist die Phase insgesamt mehr oder weniger gegen den Strom verzögert. Bei 2,5 kHz wird kaum noch eine Abhängigkeit vom Achsenabstand festgestellt.

Die geschilderten Erscheinungen erklären zunächst die Abweichungen, die bei niedriger Frequenz zwischen der Phase der mittleren Bogenstrahlung (s. Abb. 8a) und der stärker voreilenden Phase der Strahlung aus der Bogenachse (s. Abb. 13) auftreten, durch die Mittelwertbildung aus voreilenden und verzögerten Strahlungsanteilen. Ähnliches gilt auch für die Lichtmodulationsgrade. Insgesamt geben Messungen in der Bogenachse und in einem Querschnitt senkrecht zu einem ausreichenden Bild über die dynamischen Eigenschaften einzelner Teile des Bogens und ihren Beitrag zur mittleren Strahlung des gesamten Bogens.

#### Deutung dynamischer Verteilungen über die Bogenbreite

Gemäß der aus der Temperaturverteilung im stationären Fall zu berechnenden Leitfähigkeitsverteilung existiert zunächst eine homogene, vom Achsenabstand unabhängige Grundschwingung, die bei höheren Frequenzen allein beobachtet wird und Konstanz von  $m_l$  und  $\varphi$  über die Bogenbreite bedeutet. Der stationären Grundschwingung wird eine in den Randgebieten mit wachsendem Temperaturgradienten (s. Abb. 11) besonders ausgeprägte, als „Wärmewelle“ bezeichnete Erscheinung überlagert. Diese führt zu einem Ansteigen des Lichtmodulationsgrades  $m_l$  in den Bogenrandteilen bei gleichzeitiger stärkerer Verzögerung der Phase. Daraus wird geschlossen, daß es sich um einen Ausbreitungsvorgang handelt, der mit endlicher Ge-

schwindigkeit abläuft. Bei 100 Hz wurden die Verhältnisse im einzelnen durchgerechnet, es ergaben sich Geschwindigkeiten von 1,2 bis 0,2 m/sec zum Rande hin. Diese Zahlenwerte scheinen sehr niedrig zu sein,

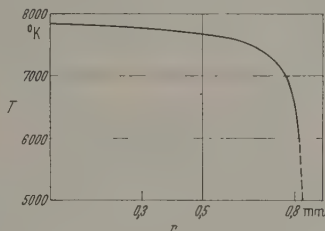


Abb. 11. Temperaturverteilung in Bogenmitte einer XBO 162

sie werden jedoch für den linearen Fall der Wärmeleitung durch eine Formel von HUND [15] gestützt, die für die Geschwindigkeit  $v$  der ebenen Welle bei

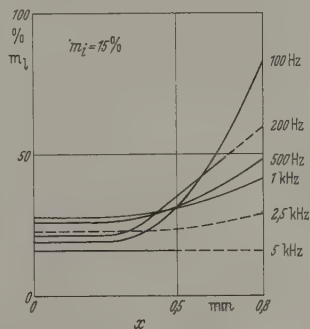


Abb. 12. Lichtmodulationsgrad in Abhängigkeit vom Achsenabstand  $x$  für  $m_l = 15\%$

sinusförmigem Temperaturverlauf der Kreisfrequenz  $\omega$  am Anfang des Wärmeleiters den Zusammenhang

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{\kappa}{\rho \cdot c} \cdot \omega} \quad (8)$$

liefert, in dem  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\rho$  die Dichte und  $c$  die spezifische Wärme ist. Setzt man die Zahlen

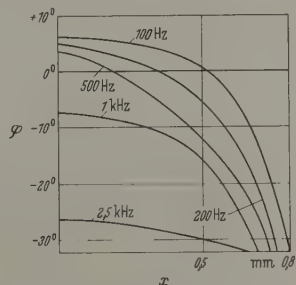


Abb. 13. Phasenverschiebung der Strahlung gegenüber dem Strom in Abhängigkeit vom Achsenabstand  $x$

für das Xenonplasma ein, folgen für  $v$  Zahlenwerte zwischen 0,56 und 0,49 m/sec zum Rand hin. Die Formel zeigt ferner, daß die Geschwindigkeit  $v$  nur mit  $\sqrt{\omega}$  wächst, während die zur Ausbildung einer Wärmewelle zur Verfügung stehende Zeit mit der Periodendauer  $1/\omega$  abnimmt. Mit wachsender Frequenz kann sich somit die Wärmewelle nicht mehr

entwickeln, womit die Abhängigkeit der Kurven von Abb. 12 und 13 von der Frequenz deutlich wird. Die Betrachtungen über die Wärmewelle sind mit den in der Theorie des modulierten Quecksilberbogens von WEIZEL, ROMPE und SCHULZ [10] gemachten Annahmen über eine mit steigender Frequenz wirksamer werdende Wärmewelle nicht in Einklang zu bringen, so daß die Theorie in dieser Hinsicht überprüft werden müßte.

### Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, einen Überblick über das Modulationsverhalten des Xenon-Hochdruckbogens zu gewinnen. Die Eigenschaften des modulierten Xenon-Bogens ähneln in mancher Hinsicht dem Quecksilberhochdruckbogen bei Modulation [1], eine qualitative Deutung kann mittels der Theorie von WEIZEL, ROMPE und SCHULZ [10] gefunden werden, wenn diese Theorie auch — wie die Frage der Wärmewelle zeigt — in Einzelheiten verfeinert werden müßte. Im Unterschied zu den von MANGOLD untersuchten Hg-Hochdrucklampen nimmt der Lichtmodulationsgrad des Xenon-Hochdruckbogens, abgesehen von der Plasmakugel vor der Kathode, bereits bei niedrigeren Frequenzen stark ab. Um auf den Ausgangspunkt der Untersuchungen, die „Lichttelephonie“ zurückzukommen, kann gesagt werden, daß die Xenon-Hochdrucklampe hierfür geeignet ist, sofern durch sehr kurzen Elektrodenabstand die positive Säule unterdrückt ist. Hinsichtlich des Verhaltens in Impulsschaltungen für Kinobetrieb kann der Xenon-Hochdruckbogen als quasi-stationär angesehen werden, da die Verzögerungszeiten der Emission gegenüber dem Strom genügend klein bleiben. Besonders erwähnt werde die Abhängigkeit der Bogenbreite von der Modulationsfrequenz, die bei 100 Hz eine Verbreiterung, bei Frequenzen zwischen 200 Hz und einigen kHz keine Änderung der Bogenbreite gegenüber derjenigen bei Gleichstrom zeigt, während bei 10 kHz eine Kontraktion mit steigender Modulationsstromstärke beobachtet wurde. Dieses Verhalten erlaubt eine Steigerung der Leistungskonzentration und damit der Lichtausbeute. Der Abhängigkeit der einzelnen Größen vom Abstand von der Bogenachse wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Ausgehend von der Strahlungsverteilung im stationären Fall wurde die Temperaturverteilung berechnet, die einen ausgeprägten Kanal mit scharf begrenztem Durchmesser ergab. Weiterhin wurden mittels der aus der Temperaturverteilung folgenden Daten die zu der Annahme einer Wärmewelle führenden Messungen theoretisch gestützt und gezeigt, daß eine Wärmewelle nur bei niedrigen Frequenzen existiert, ein Verhalten, das für eine Hg-Hochdrucklampe in der Dissertation von H. ZWICKER [5] gefunden wurde.

Aus dem in dieser Arbeit gesammelten Material lassen sich eine ganze Reihe von Anregungen für weitere Untersuchungen gewinnen. Zunächst wäre daran zu denken, den Frequenzbereich der geschilderten Apparatur nach oben zu erweitern und die Leistung des Verstärkers zu erhöhen, um zum Wechselstrombetrieb bei höheren Frequenzen übergehen zu

können. Modulationsmessungen an Xenon-Hochdrucklampen, in denen der Elektrodenabstand und der Druck meßbar variiert werden, sollten Daten liefern, die zu einer Verbesserung der Theorie modulierter Bögen führen könnten.

### Zusammenfassung

Dem mit Gleichstrom betriebenen Xenonbogen wurde eine Wechselstromkomponente überlagert, deren Frequenz und Amplitude regelbar war. Es wurden die modulierten Anteile der Bogenspannung und der Strahlung bei Strommodulationsgraden bis 45% im Frequenzbereich von 100 Hz bis 25 kHz gemessen. Die Phasenlagen wurden mit besonderer Sorgfalt ermittelt. Die Strahlung des Bogens wurde sowohl für den Gesamtbogen im Mittel als auch für einzelne Bogenteile getrennt nach Kontinuum und Linien erfaßt. Das elektrische Verhalten der untersuchten Xenonbögen kann durch ein Ersatzschaltbild beschrieben werden, in dem parallel zum Ohmschen Widerstand des Gleichstrombetriebs eine Reihenschaltung aus einem Ohmschen und einem induktiven Widerstand angenommen wird, die frequenzabhängig sind. Die Bogenwechselspannung eilt dem Strom voraus. Die Amplitude der Strahlung ist bei hoher Leistungskonzentration im Bogen wenig von der Frequenz abhängig, bei niedriger Leistungskonzentration nimmt sie bei Frequenzen oberhalb einiger kHz stark ab. Die Phase der Strahlung ist bei zunehmender Frequenz verzögert gegenüber der Stromphase mit Werten von  $10^{-3}$  bis  $10^{-6}$  sec. Hierfür ist die nichtstationäre Wärmeleitung und die Einstellung der Temperaturverteilung verantwortlich, nicht aber die Einstellung des lokalen Temperaturgleichgewichtes zwischen den Plasmakomponenten. Ausbreitungsvorgänge in Form einer Wärmewelle, die von der bisher vorliegenden Theorie gefunden wurden, konnten nur für niedrigen Frequenzen nachgewiesen werden.

Abschließend ist es mir eine angenehme Pflicht Herrn Prof. Dr. P. SCHULZ und Herrn Prof. Dr. O. REEB für die Anregung zu dieser Arbeit und ihr stetes, förderndes Interesse zu danken.

**Literatur:** [1] MANGOLD, M.: ENT 17, 57 (1940). — [2] REEB, O.: Lichttechnik 5, 228 (1953). — [3] D'ARCY, E. W., u. A. C. SEDA: J. SMPTE 63, 98 (1954). — [4] MENEN, H.: Diss. Hannover 1953. — [5] ZWICKER, H.: Diss. Hannover 1955. — [6] ROMPE, R., u. H. ROTHER: Ann. Physik, VII. F. 3, 28 (1959). — [7] KANACHER, L.: Diplomarbeit 1959 im Lichttechn. Institut der TH Karlsruhe. — [8] SCHULZ, P.: Reichsb. Phys. I, 147 (1944). — SCHULZ, P.: Ann. d. Phys. 1, 95, 107 (1947). — [9] FRÜHLING, W. G. W. MÜNCH u. M. RICHTER: Die Eignung der Xenon-Hochdrucklampe als Standardlichtquelle für Strahlungs- und Farbmessungen. CIE-Zürich 1955. — [10] WEIZEL, W., R. ROMPE u. P. SCHULZ: Z. techn. Phys. 21, 387 (1940). — Z. Physik 117, 545, (1941); 119, 237 (1947). — [11] WEIZEL, W. u. R. ROMPE: Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1949. — [12] HÖRMANN, H.: Z. Physik 97, 539 (1935). — [13] BAUER, A., u. P. SCHULZ: Z. Physik 155, 614 (1959). — [14] LARCHE, K.: Z. Physik 136, 74 (1953). — [15] HUND, F.: Einführung in die theoretische Physik, Bd. IV, Theorie der Wärme. Leipzig: Bibliographisches Institut 1950.

Dr. HANS-JÜRGEN HENTSCHEL  
Lichttechnisches Institut der Techn. Hochschule  
Karlsruhe



# Über das Abklingen von Lichtbögen. I

## Theoretische Überlegungen

Von GERHARD FRIND

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 18. Februar 1960)

### I. Voraussetzungen und Problemstellung

Die Löschung eines Wechselstromlichtbogens erfolgt bekanntlich bei einem Strom-Nulldurchgang. Die Spitzenwerte des Stromes sind kurz vor dem Stromdurchgang selbst bei Schaltern für hohe Leistungen so klein, daß sich nur ein geringes Plasmamagen in der Schaltstrecke befindet. Das zeigen Erfahrungen von KOPPELMANN [1], MASON [2] und HORST und RUTGERS [3]. Ein ähnliches Plasma mag ein Gleichstrombogen von nur wenigen Ampere bestärke ausbilden. Deshalb besteht die Hoffnung, daß man aus Versuchen mit stromschwachen Gleichstrombögen ein angenähertes Bild von den Vorgängen in einem starken Wechselstrombogen in der Nähe des Strom-Nulldurchgangs gewinnen kann. Von besonderer Bedeutung für die Diskussion der Vorgänge ist die Zeitkonstante  $\Theta$ , mit der der Wert des Bogens seinem Endwert zustrebt. Das ist deutlich aus der von CASSIE [4], [5], [6], [7], [8], [9], T.E. BROWNE [10], [11], [12] und HEDT [13] entwickelten Theorie des dynamischen Widerstandes hervor, nach welcher der Widerstand  $W$  des Bogens beim Strom-Nulldurchgang um so größer ist, je kleiner die Zeitkonstante  $\Theta$  ist [9]:

$$W = \frac{N}{2(I_0 \omega \Theta)^2} \quad (1)$$

Leistungsaufnahme des Bogens in der Nähe des Strom-Nulldurchgangs. Sie wird oft als konstant angesetzt, weil die Charakteristik eines Lichtbogens etwa hyperbolisch verläuft,  
 $N = U \cdot I = \text{konstans.}$   
Scheitelwert des Stromes.  
Kreisfrequenz des Wechselstroms =  $2\pi\nu = 314$  bei 50 Hz.

Über den Einfluß der Gasart auf die Größe von  $\Theta$  sind neuerdings interessante Arbeiten von BROWNE, YOUNG und SPINDLE [14], von YOON und SPINDLE [15] und von YOON, BROWNE, SPINDLE und AZINGER [21] erschienen. Die Autoren messen oszillographisch den zeitlichen Verlauf der elektrischen Feldstärke, den man erhält, wenn durch Kurzschließen eines Widerstandes mit einem schnellen Thyatron eine Spannungsstufe und damit eine Stromstufe auf einen Gleichstrombogen gegeben wird. Die Spannung (Feldstärke) läuft dann in einem abklingenden Vorgang nach einer  $e$ -Funktion in den neuen Punkt der Charakteristik ein. Aus der Schnelligkeit des Abklingens, die durch die thermische Trägheit des Gases bedingt ist, ermittelten die Autoren die konstante  $\Theta$  des Bogens. Sie erhielten für 1 A-Bögen, die in Rohren von 3/4 inch ( $\sim 19$  mm) Durchmesser brannten, folgende Werte:

Gas	SF <sub>6</sub>	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	Luft	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	He
$\Theta$ [μsec]	0,8	1,5	15	80	210	1	1

äußerten die Vermutung, daß der zwischen Luft und Schwefelhexafluorid (SF<sub>6</sub>) gefundene, überraschend große Faktor 100 in der Zeitkonstanten die

gleichen Ursachen habe wie der ähnlich große Faktor, um den sich bei vergleichenden Löschversuchen<sup>1</sup> SF<sub>6</sub> der Luft überlegen erwies [16]. Für solche gemeinsamen Ursachen halten die Autoren die unterschiedliche Elektronenaffinität und Bindungsenergie der einzelnen Gase.

Es fällt aber auf, daß auch O<sub>2</sub> und H<sub>2</sub> und sogar He eine dem SF<sub>6</sub> entsprechende kleine Zeitkonstante haben. Auch CO<sub>2</sub> liegt in dieser Beziehung sehr niedrig. Nach Versuchen von ZÜCKLER [16] sind aber H<sub>2</sub> und CO<sub>2</sub> keinesfalls bessere Löschgase als Luft, oder gar mit SF<sub>6</sub> vergleichbar. Auch MAYR [9] fand keine großen Unterschiede in der Löschfähigkeit von Luft, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub> und CO<sub>2</sub>. Ähnliches gilt insbesondere für Helium, das trotz seiner kleinen Zeitkonstanten kein auch nur einigermaßen brauchbares Löschgas ist (Metastabile).

Aus diesen Gründen darf man offenbar nicht direkt von den von BROWNE u. Mitarb. gemessenen Zeitkonstanten  $\Theta$  auf das Löschvermögen der betreffenden Gase in Wechselstromschaltern schließen. Aufgabe dieser Arbeit soll es sein, zu versuchen, die sehr unterschiedlichen Werte der von BROWNE u. Mitarb. gemessenen Zeitkonstanten auf physikalische Eigenschaften der Bögen in verschiedenen Gasen zurückzuführen. Im Anschluß daran diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Zeitkonstanten und Löschfähigkeit.

### II. Temperaturverteilung eines zylindrischen Gleichstrombogens

Zunächst wollen wir unsere Überlegungen zum Abklingproblem an der vollständigen Abschaltung eines Gleichstrombogens durchführen. Da die Temperaturverteilung des Gleichstrombogens Anfangsbedingung für den nachfolgenden Abklingvorgang ist, und da der Einfluß der Gasart auf die Abklinggeschwindigkeit gerade in der Anfangsbedingung deutlich zum Ausdruck kommen wird, soll zuerst der Einfluß der Gasart auf die Temperaturverteilung eines Gleichstrombogens diskutiert werden.

Ausgangspunkt zur Ermittlung der Temperaturverteilung ist die stationäre Energiebilanzgleichung von ELENBAAS-HELLER, die in dem hier vorausgesetzten zylindersymmetrischen Falle lautet:

$$\sigma \cdot E^2 = - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \kappa \frac{dT}{dr} \right) \quad (3)$$

$\sigma$  = elektrische Leitfähigkeit,  
 $\kappa$  = thermische Leitfähigkeit.

Die Joulesche Wärme wird also allein durch Wärmeleitung aus dem Bogen abtransportiert. Wir vernachlässigen hier alle übrigen Energieanteile wie insbesondere

<sup>1</sup> Die Löschfähigkeit kennzeichnet man meist durch die Steilheit des Spannungsanstiegs nach dem Strom-Nulldurchgang, den ein Schalter bei gegebener Stromstärke gerade noch beherrscht.

die Strahlung. Bei nicht zu hohen Drucken sollte das bei den von uns ins Auge gefaßten geringen Stromstärken in der Nähe des Strom-Nulldurchgangs erlaubt sein. Nach einem Vorschlag von SCHMITZ [17] gab kürzlich MAECKER [18] ein Näherungsverfahren

Kurve einander gleich sind. (Genaueres und Weiteres bei MAECKER [18].)

Während sich die  $\sigma(S)$ -Kurve nach kleinen Werten hin asymptotisch der  $S$ -Achse nähert, wird im Näherungsverfahren die Leitfähigkeit zwischen  $S=0$  und dem Schnittpunkt  $S_1$  der Näherungsgeraden mit der  $S$ -Achse gleich Null gesetzt. In der durch die Gerade gekennzeichneten Näherung unterscheiden wir also ein inneres, elektrisch leitfähiges Gebiet des Bogen  $S_1 < S < S_0$  und ein äußeres, nicht leitfähiges Gebiet  $0 < S < S_1$ .

Die Leitfähigkeit  $\sigma^*$  auf der Näherungsgeraden genügt der Gleichung

$$\sigma^* = B(S - S_1), \quad (6)$$

$B$  = Neigung der Geraden.

Mit Gl. (6) und der Substitution

$$x = E \sqrt{B r} \quad (6a)$$

erhält man aus (5):

$$\sigma^* = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\sigma^*}{dx} \right). \quad (7)$$

Das ist eine Besselsche Differentialgleichung mit der Lösung:

$$\sigma^* = \sigma_0^* J_0(x). \quad (8)$$

Für den radialen Abfall der Wärmeleitfunktion  $S$  folgt hieraus:

$$S = S_1 + (S_0 - S_1) J_0(x). \quad (9)$$

Im Leitfähigkeitsgebiet des Bogens  $S_1 < S < S_0$  fallen also die elektrische Leitfähigkeit und die Wärmeleitfunktion nach außen wie die Bessel-Funktion nullter Ordnung ab.

Im nicht leitfähigen Gebiet  $0 < S < S_1$  ergibt sich aus (7) die Differentialgleichung:

$$0 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dS}{dx} \right), \quad (10)$$

die durch

$$S = \ln x + \text{konstans} \quad (11)$$

gelöst wird. Die Wärmeleitfunktion  $S$  setzt sich also stetig über  $S_1$  hinaus als logarithmische Funktion fort.

In Abb. 2 sind  $S(r)$ -Kurven für einige Stickstoffbögen mit verschiedenen Achsentemperaturen wieder gegeben. Da die Temperatur nach (4) eine eindeutige Funktion der Wärmeleitfunktion  $S$  ist, sind auch zugleich die zugehörigen Kurven der Temperaturverteilung  $T(r)$  festgelegt (Abb. 3) [18].

Die Breite des leitfähigen Teiles der  $S(r)$ -Kurven (Bessel-Funktion bis  $S_1$  in Abb. 2) durchläuft bei gegebenem Rohrradius  $R$  mit wachsender Achsentemperatur ein Minimum bei etwa 11000 °K. Dem entspricht in den  $T(r)$ -Kurven ein bei derselben Temperatur auftretender enger Temperaturkern, der auf einem breiten Temperaturberg aufsitzt. Wir sprechen im folgenden der Einfachheit halber meist nur von „Kern“ und „Berg“. Mit wachsender Temperatur wird der Kern wieder breiter, bis er schließlich das Rohr fast völlig ausfüllt. Die Breite der Temperaturkurve an der Stelle, an der die Temperatur beispielsweise auf 80 % des Achsenwertes abgefallen ist, durchläuft ersichtlich ebenso ein Minimum mit anwachsender Achsentemperatur.

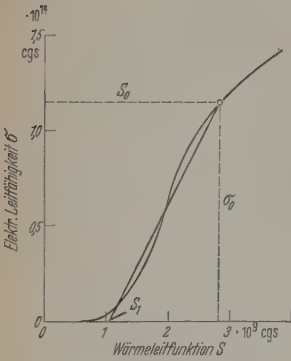


Abb. 1. Näherung der  $\sigma(S)$ -Kurve durch einen Polygonzug nach [18]

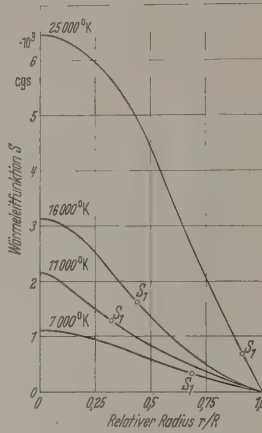


Abb. 2. Radiale Verteilung der Wärmeleitfunktion von  $N_2$ -Bögen (nach [18])

für eine analytische Lösung der Energiebilanzgleichung (3) an. Zu diesem Zweck eliminiert man aus Gl. (3) die Materialfunktion  $\kappa(T)$  durch Einführung der Wärmeleitfunktion  $S$ :

$$S(T) = \int_0^T \kappa(T) dT \quad (4)$$

und erhält:

$$\sigma \cdot E^2 = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right). \quad (5)$$

Die ebenso unbequeme Abhängigkeit der Leitfähigkeit  $\sigma$  von der Temperatur bzw. von der Wärmeleit-

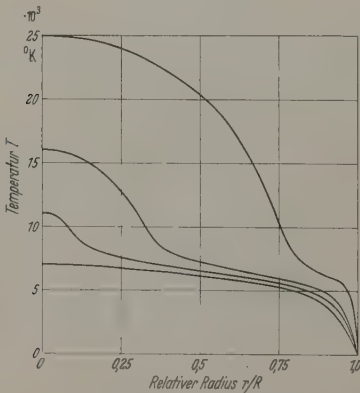


Abb. 3. Temperaturverteilungen von  $N_2$ -Bögen (nach [18])

funktion  $S$  macht man durch eine Näherung der analytischen Behandlung zugänglich. Trägt man nämlich  $\sigma$  gegen  $S$  auf, so erhält man im allgemeinen eine geschwungene Kurve (Abb. 1), die man durch eine Gerade annähert, etwa so, daß beide den Punkt  $S_0$ ,  $\sigma_0$ , also die entsprechenden Achsenwerte, gemeinsam haben und außerdem die Flächen unter Gerade und



inen einfachen qualitativen Einblick in den Vor-  
der *Kernbildung* vermittelt uns eine Diskussion  
Fourier-Ansatzes für den Wärmestrom  $Q$ :

$$Q = -2\pi r \kappa \frac{dT}{dr}. \quad (12)$$

hen wir vereinfachend an, daß die Joulesche  
ie nur in unmittelbarer Achsennähe frei wird, so  
er Wärmestrom  $Q$  für alle achsenfernen Punkte  
ogens von gleichbleibender Größe,  $Q = \text{konstans}$ .  
a wir von einer geringen Variation im Radius  $r$   
o erhalten wir aus Gl. (12):

$$\kappa \frac{dT}{dr} \approx \text{konstans}. \quad (12a)$$

blick auf die Kurve für die Temperaturabhängig-  
der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  in Abb. 4 zeigt fol-  
des:

at ein  $N_2$ -Bogen eine Achsentemperatur unter  
 $7000^\circ\text{K}$ , so steigt seine Wärmeleitfähigkeit vom  
e zur Achse hin stark an. Der zum Abtransport

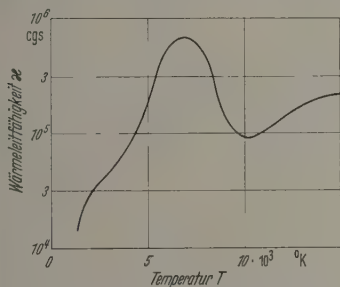


Abb. 4. Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff (nach [20])

Wärme notwendige Temperaturgradient kann mit  
sender Temperatur also kleiner werden. Es bil-  
eich ein breiter Temperaturberg, wie ihn Abb. 3  
die  $7000^\circ\text{K}$  Kurve zeigt.

steigt die Achsentemperatur eines  $N_2$ -Bogens (um  
h bessere elektrische Leitfähigkeit einen größeren  
transportieren zu können) auf etwa  $11000^\circ\text{K}$   
so erzwingt die über  $7000^\circ\text{K}$  zu einem tiefen Mini-  
abfallende Wärmeleitfähigkeit ein starkes Anstei-  
des Temperaturgradienten  $dT/dr$  in Achsennähe.

Die *Kernbildung*<sup>1</sup> im Stickstoffbogen kommt also  
durch zustande, daß die relativ kleine Wärmeleit-  
fähigkeit bei Temperaturen um  $11000^\circ\text{K}$  einen steilen  
Temperaturgradienten zur Folge hat.  $N_2$ -Bögen haben  
dann einen ausgeprägten Kern, wenn ihre Achsen-  
temperatur wesentlich über der des Wärmeleitmaxi-  
ums liegt. Dieses Maximum wird durch die *Diffusion*  
*Dissoziationsenergie* verursacht. Bei hohen Tem-  
peraturen diffundieren nämlich die aus Molekülen  
ch Dissoziation entstandenen Atome in Gebiete  
erer Temperatur und rekombinieren dort, wobei  
Dissoziationsenergie in Freiheit gesetzt wird.  
Der Vorgang bedeutet einen zur normalen Wärme-  
fähigkeit hinzukommenden Prozeß von beacht-  
er Wirksamkeit.

Die am stationären Stickstoffbogen gewonnenen  
gebnisse können nun leicht auf andere Molekül-

<sup>1</sup> Vergleiche KING [19], sowie BURHORN [20], der die Kern-  
ung auch experimentell nachgewiesen hat.

gase und -Dämpfe übertragen werden. Fast alle  
Moleküle sind schwächer gebunden als Stickstoff und  
haben das Maximum in der  $\kappa(T)$ -Kurve bei entspre-  
chend niedrigeren Temperaturen, so z.B. Sauerstoff  
und Wasserstoff bei etwa  $4500^\circ\text{K}$ , Schwefeldampf bei  
etwa  $3000^\circ\text{K}$ , Chlorgas bei etwa  $2500^\circ\text{K}$  und die  
übrigen Halogene bei noch tieferer Temperatur.

Der breite Temperaturberg wird bei diesen Medien  
also nur bis zu den oben angegebenen Temperaturen  
reichen und darauf wird ein verhältnismäßig schmaler  
Temperaturkern sitzen, der praktisch den gesamten  
Strom leitet<sup>2</sup>. Daher haben Bögen in Medien mit  
kleiner Dissoziationsenergie schon bei geringer Strom-  
stärke um wenige Ampere einen ausgeprägten Kern  
(Abb. 5).

Eine Formel zur quantitativen Berechnung der  
Breite des Leitfähigkeitsgebietes können wir der Arbeit

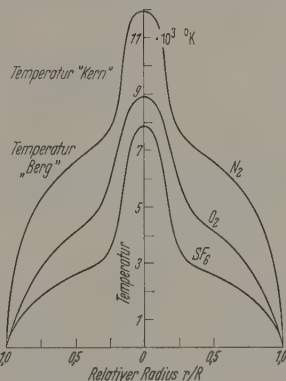


Abb. 5. Schematische Temperaturverteilungen an den Beispielen  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $SF_6$

von MAECKER [18] entnehmen. Der Leitfähigkeits-  
radius  $r_e$  eines zylindersymmetrischen Bogens mit dem  
Rohrradius  $R$  beträgt danach:

$$r_e = R \cdot 1,46 e^{-\frac{1}{2zf}} \quad (13)$$

mit  $z = 1,2484$

$$f = \int_0^{S_0} \sigma dS / \sigma_0 S_0. \quad (14)$$

Der Füllfaktor  $f$  ist also das Verhältnis der Fläche  
unter der  $\sigma(S)$ -Kurve zu dem Rechteck  $\sigma_0 S_0$  (vgl.  
Abb. 1). Je kleiner der Füllfaktor ist, desto kleiner ist  
auch der relative Leitfähigkeitsradius.

### III. Abklingen eines plötzlich stromlosen Bogens

Es sollen nun die Abklingerscheinungen nach  
plötzlichem Abschalten des Stromes untersucht wer-  
den. Dabei werden die Zeitkonstanten  $\theta$ ,  $\tau'$  und  $\tau$   
zu bestimmen sein, die in dieser Reihenfolge zum Leit-  
wert  $G$ , zur Wärmeleitfunktion  $S$  und zur Tempera-  
tur  $T$  gehören. Der mathematische Gang der Unter-  
suchung bringt es mit sich, daß wir uns zuerst um die  
Wärmeleitfunktion  $S$  und ihre Zeitkonstante  $\tau'$  be-  
mühen.

<sup>2</sup> Bei Temperaturen unter  $4500^\circ\text{K}$  ist die Elektronen-  
dichte und damit die Leitfähigkeit der genannten Gase und  
Dämpfe noch klein. Nennenswerte Stromdichten sind deshalb  
nur im Kern vorhanden.

Die Energiebilanzgleichung für einen abgeschalteten Bogen lautet [22]:

$$\varrho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \operatorname{grad} T \right) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \kappa \frac{dT}{dr} \right). \quad (15)$$

Darin ist die Schwerpunktgeschwindigkeit  $v$  des Gases durch die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\varrho v) \quad (16)$$

festgelegt. Da wir für das Gleichungssystem (15), (16) keine analytische Lösung angeben können, wollen wir vorerst die Schwerpunktgeschwindigkeit  $v$  des von außen bei der Abkühlung nachströmenden Gases vernachlässigen. Die zu berechnenden Zeitkonstanten werden also größer sein als die wirklichen. Transformiert man Gl. (15) wieder von  $T$  nach  $S$ , so erhält man die bekannte Wärmeleitungsgleichung für  $S$  anstatt wie üblich für  $T$ :

$$\frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right) \quad (17)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit  $k = \frac{\kappa}{\varrho c_p}$  und der spezifischen Wärme  $c_p$ .

Setzt man nun noch näherungsweise die Temperaturleitfähigkeit  $k$  konstant, so hat Gl. (17) die bekannte Lösung [23], [24]:

$$S(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m r) e^{-\lambda_m^2 k t}. \quad (18)$$

Dies ist eine Summe von Bessel-Funktionen der nullten Ordnung, wobei man  $J_0(\lambda_1 r)$  als Grundwelle und die  $J_0(\lambda_m r)$  mit  $m > 1$  als unharmonische Oberwellen auffassen kann. Die Entwicklungskoeffizienten  $A_m$  bestimmen sich in bekannter Weise dadurch, daß die Anfangsverteilung der Wärmeleitfunktion

$$S(r, t=0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m r) \quad (19)$$

nicht durch die Grundwelle  $J_0(\lambda_1 r)$  allein, sondern noch zusätzlich durch einige Oberwellen dargestellt werden muß. Je dünner der Temperaturkern und damit der Leitfähigkeitsbereich der Kurve  $S(r)$  ist (Bessel-Funktion bis  $S_1$  in Abb. 1), um so höhere Oberwellen sind zur Darstellung von  $S(r)$  erforderlich.

Für unsere Diskussion ist es nun wesentlich, daß die Oberwellen mit wachsendem Index  $m$  schnell abnehmende Zeitkonstanten  $\tau'_m$  haben, denn es ist:

$$\tau'_m = \frac{1}{k \lambda_m^2} \quad (20)$$

mit

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{R^2}{2,40^2}; \quad \frac{1}{\lambda_3^2} = \frac{R^2}{8,65^2};$$

$$\frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{R^2}{5,52^2}; \quad \frac{1}{\lambda_4^2} = \frac{R^2}{11,79^2}; \text{ und so fort [24];}$$

darin ist  $R$  der Rohrradius des zylindersymmetrischen Bogens. Im wesentlichen ergibt sich also, daß das Abklingen der Wärmeleitfunktion  $S$  nicht durch eine einzige, sondern durch ein Spektrum von Zeitkonstanten beschrieben werden muß, das je nach der Art der Anfangsverteilung der Wärmeleitfunktion sehr verschieden sein kann. Es erscheint daher plausibel, daß im Zeitkonstantenspektrum eines Bogens mit einem besonders engen Kern die kleinste Zeitkonstante, nämlich die für den Kern, bis zu zwei Größen-

ordnungen kleiner sein kann als die größte, dem Bogen zugehörige Zeitkonstante.

Auch der Temperaturzusammenbruch muß im allgemeinen durch mehrere Zeitkonstanten beschrieben werden, wie folgende Abschätzung lehrt:

$$\text{Wegen } S = \int_0^T \kappa dT = \bar{\kappa} T \text{ ist:}$$

$$\frac{d \ln S}{dt} = \frac{\kappa \ln T}{\bar{\kappa} dt}. \quad (21)$$

Beschreiben wir die zeitlichen Änderungen von  $S$  und  $T$  innerhalb kleiner Zeitintervalle mit Hilfe der momentanen Zeitkonstanten  $\tau'$  und  $\tau$  durch:

$$S = S_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}, \quad T = T_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (21a)$$

so erhalten wir mit Gl. (21):

$$\tau = \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \tau'. \quad (22)$$

Die momentane Zeitkonstante  $\tau$  für den Temperaturabfall ist also der für das Abklingen der Wärmeleitfunktion proportional mit einer Konstanten, die bei der Temperatur des Bogenkerns kleiner als 1 sein kann, unterhalb der Temperatur des Maximums in der Kurve der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit (Abb. 4) aber sicher größer als 1 ist.

Das Abklingen der Temperatur wird somit sicher durch ein „breiteres“ Spektrum beschrieben als das der Wärmeleitfunktion.

Den Beweis dafür, daß auch das Abklingen des Leitwertes durch ein Spektrum von mehreren Zeitkonstanten beschrieben werden muß, werden wir am Ende des folgenden Abschnittes IV. führen.

#### IV. Die Zeitkonstante für das Abklingen des Leitwertes eines Bogens in seinem „Leitfähigkeitsgebiet“

Wegen der besonderen Wichtigkeit des Abklinsens des Leitwertes eines Bogens insbesondere für Schaltphänomene wollen wir dieses einer weiteren Untersuchung unterziehen.

Zur Berechnung des Abklinsens des elektrischen Leitwertes eines Plasmas gehen wir wieder von der zeitabhängigen Energiebilanzgleichung aus, hier gleich von  $T$  nach  $S$  transformiert:

$$\sigma \cdot E^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right) = \frac{1}{k} \frac{dS}{dt}. \quad (23)$$

Mit den Substitutionen:

$$\frac{dS}{d\sigma^*} = \frac{1}{B} \quad (\text{Näherung wie Gl. (6)}) \quad (24a)$$

$$x = E \sqrt{B} r \quad (24b)$$

$$\vartheta = B E^2 t \quad (24c)$$

erhalten wir die Gleichung

$$\sigma^* + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\sigma^*}{dx} \right) = \frac{1}{k} \frac{d\sigma^*}{dt}, \quad (25)$$

für die der Produktsatz:

$$\sigma^* = \sigma_1^*(x) \sigma_2^*(\vartheta) \quad (26)$$

zu der Lösung:

$$\sigma^* = \sigma_0^* J_0(x) e^{-k \vartheta} \quad (27)$$

führt.



Integration dieser Gleichung über den Querschnitt liefert die Zeitabhängigkeit des Leitwertes pro Bogenlänge:

$$G = \frac{2\pi\sigma_0^* z}{E^2 B} e^{-k B E^2 t}; \quad (28)$$

und:  $G$  = Leitwert des Bogens pro cm Bogenlänge,  
 $z = 1,2484$ ,  
 $\sigma_0^*$  = Leitfähigkeit in Bogenachse vor dem Abklingen.

Gl. (6a) läßt sich die Zeitkonstante in Gl. (28) einsetzen. Man erhält:

$$E^2 B = \frac{x_0^2}{r_0^2} = \frac{2,40^2}{r_0^2}, \quad (29)$$

in  $r_0$  also der Radius des leitfähigen Gebietes in der Approximation durch eine Bessel-Funktion ist. Man überzeugt sich davon, daß dieser um den Faktor 1,52 größer ist als der leitfähige Radius  $r_e$  in der Näherung durch das Kanalmodell.

Als (28) und (29) ergibt sich:

$$\Theta = \frac{\pi r_0^2}{\pi 2,40^2 k}. \quad (30)$$

Das Abklingen des Leitwertes ergibt sich in dieser Näherung also eine einzige Zeitkonstante  $\Theta$ , die dem jeweiligen Querschnitt  $\pi r_0^2$  direkt und der Temperaturleitfähigkeit  $k$  umgekehrt proportional ist. Demnach wird ein Bogen um so schneller abklingen, je größer sein leitfähiger Kern und je höher seine Temperaturleitfähigkeit  $k$  ist. Es fällt aber auf, daß das Abklingen des Leitwertes  $G$  durch eine einzige Zeitkonstante beschrieben werden kann, während Wärmefunktion und Temperatur mehrere Zeitkonstanten aufweisen [Gln. (20), (22)]. Es liegt nahe, zu vermuten, daß dieses an der hier gewählten Näherung der  $\sigma(S)$ -Kurve durch eine Gerade liegt, die in der Nähe der Kurve für das Abklingproblem eine zu grobe Näherung ist. Wir nähern deshalb<sup>1</sup>, wie bereits SCHMITZ vorgeschlag, die  $\sigma(S)$ -Kurve durch einen Polygonzug aus etwa von zwei Geraden, wie Abb. 6 zeigt, an. Die Kurve hat dann im Gebiet  $i$  ( $i=1,2$ ) die Gestalt:

$$\sigma_i = B_i(S - S_i). \quad (31)$$

Energiebilanzgleichung

$$\sigma \cdot E^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right) = \frac{1}{k} \frac{dS}{dt}$$

nach Multiplikation mit  $B_i$  und Einsetzen von Gl. (31) zu:

$$\sigma_i B_i E^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\sigma_i}{dr} \right) = \frac{1}{k} \frac{d\sigma_i}{dt}. \quad (32)$$

stationäre Lösung ( $t=0$ ) ist bestimmt durch:

$$\sigma_i^0 B_i E^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\sigma_i^0}{dr} \right) = 0. \quad (33)$$

Nehmen Ansatz

$$\sigma_i^*(r, t) = \sigma_i^*(r) e^{-\frac{t}{\Theta_i}} \quad (34)$$

Setzt man aus Gl. (32)

$$\sigma_i^* \frac{1}{k \Theta_i} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\sigma_i^*}{dr} \right) = 0. \quad (35)$$

Der folgende Beweis wurde in dankenswerter Weise von dem Theoretiker, Herrn Dr. W. FREI, geführt.

Aus Stetigkeitsgründen muß  $\sigma_i^*(r) = \sigma_i^0(r)$  sein. Der Koeffizientenvergleich in den Gln. (33), (35) liefert:

$$\Theta_i = \frac{1}{k B_i E^2}. \quad (36)$$

Zu jeder Neigung  $B_i$  gehört also eine eigene Zeitkonstante  $\Theta_i$ . Da wir die  $\sigma(S)$ -Kurve auch durch mehr als nur zwei Geraden approximieren können, bedeutet dies, daß auch das Abklingen des Leitwertes genau nur durch eine ganze Reihe von Zeitkonstanten beschrieben werden kann.

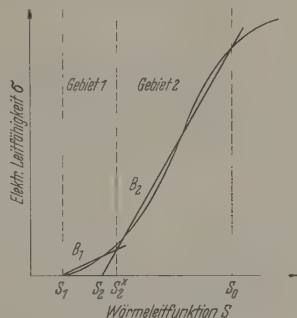


Abb. 6. Schematische  $\sigma$ - $S$ -Kurve durch zwei Geradenstücken genähert

Eine gute Annäherung an die wirklichen Verhältnisse beim Abklingen des Leitwertes erhalten wir schon, wenn wir z. B. bei einem Bogen mit einem ausgeprägten Kern, wie es Abb. 6 schematisch andeutet,

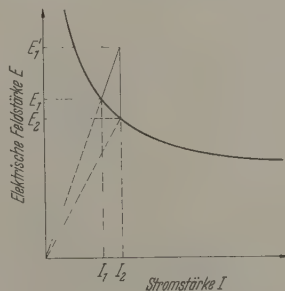


Abb. 7. Zur Stromstufe an einem Bogen

eine steile Gerade so legen, daß sie das schnelle Abklingen des Kerns und eine flache so, daß sie das langsame Abklingen des Temperaturberges beschreibt.

## V. Die Zeitkonstante $\Theta$ für das Abklingen des Leitwertes bei Stromstufen

Die Zeitkonstante  $\Theta$  für das Abklingen des Leitwertes des Bogenkerns kann vorteilhaft aus einem Versuch ermittelt werden, bei dem man eine kleine Stromstufe auf den Bogen schaltet (vgl. Kapitel I). Theoretisch kann man  $\Theta$  mit Hilfe der Störungsrechnung gewinnen<sup>2</sup>.

Erhöht man die Stromstärke des Bogens sehr schnell von  $I_1$  nach  $I_2$  (vgl. Abb. 7), dann springt die Feldstärke von  $E_1$  nach  $E_2$ , weil zunächst der Leitwert unverändert bleibt, und fällt mit der Zeit auf den neuen Gleichgewichtswert  $E_2$  ab. Da sich der

<sup>2</sup> Herrn Kollegen Dr. W. FREI sei auch an dieser Stelle für die hier folgende Berechnung der Zeitkonstanten  $\Theta$  bei einer Stromstufe herzlich gedankt.

Anfangszustand der Wärmeleitfunktion  $S$

$$S^{(1)} = S_1 + (S_0^{(1)} - S_1) J_0(\sqrt{B} E_1 r) \quad (37)$$

nur wenig vom Endzustand unterscheidet

$$S^{(2)} = S_1 + (S_0^{(2)} - S_1) J_0(\sqrt{B} E_2 r), \quad (38)$$

bekommt man bei Konstanthalten von  $B$  und  $S_1$  durch Entwicklung von  $S_0^{(1)}$  und  $J_0(\sqrt{B} E_1 r)$  nach der relativen Leitwärtsänderung  $\frac{\Delta G}{G} = \frac{G_1 - G_2}{G_2}$  mit  $x = \sqrt{B} E_2 r$ :

$$(S^{(1)} - S_1) = (S_0^{(2)} - S_1) \left\{ J_0(x) + \left[ J_0(x) \frac{d \log L}{d \log G} - x J_1(x) \frac{d \log E}{d \log G} \right] \frac{\Delta G}{G} \right\} \quad (39)$$

Außerdem gilt für die Feldstärke:

$$E'_1 - E_2 = I_2 \left( \frac{E_1}{I_1} - \frac{E_2}{I_2} \right) = -E_2 \frac{\Delta G}{G}. \quad (40)$$

Der Übergang vom Anfangs- in den Endzustand selbst wird dargestellt durch:

$$\left. \begin{aligned} S(x, t) &= S^{(2)} + (S^{(1)} - S^{(2)}) f_1(x, t) \\ \text{mit } f_1(x, 0) &= 1 \quad \text{und} \quad f_1(x, \infty) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= E_2 + (E'_1 - E_2) f_2(t) \\ \text{mit } f_2(0) &= 1 \quad \text{und} \quad f_2(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Setzt man nun zur Berechnung einer mittleren Zeitkonstanten:

$$f_1(x, t) \approx f_2(t); \quad \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial t} \approx -\frac{1}{\Theta_{\text{Stufe}}} f_2(t) \quad (43)$$

und integriert die Differentialgleichung:

$$\sigma \cdot E^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial t}$$

über den Querschnitt, dann ergibt sich mit  $\frac{x_0^2}{B E_2^2} = r_0^2$ :

$$\left. \begin{aligned} &\frac{L^{(2)}}{2\pi z(S_0^{(2)} - S_1)} \left( 1 - f_2(t) \frac{\Delta G}{G} \right) - \\ &\quad - \left( 1 + \frac{d \log L}{d \log G} f_2(t) \frac{\Delta G}{G} \right) \\ &= -\frac{r_0^2}{x_0^2 k \Theta_{\text{Stufe}}} f_2(t) \frac{\Delta G}{G} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Daraus folgt:

$$L^{(2)} = 2\pi z(S_0^{(2)} - S_1) \quad (45)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0^2 k \Theta_{\text{Stufe}}}{r_0^2} &= \frac{1}{1 + \frac{d \log L}{d \log G}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d \log G}{d \log I} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d \log E}{d \log I} \right) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

also:

$$\Theta_{\text{Stufe}} = \frac{\pi r_0^2}{x_0^2 \pi k} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d \log E}{d \log I} \right). \quad (46a)$$

Auch  $\Theta_{\text{Stufe}}$  ist dem leitfähigen Querschnitt  $\pi r_0^2$  direkt und der Temperaturleitfähigkeit  $k$  umgekehrt proportional. Es geht noch ein Faktor ein, der von der Neigung der Strom-Spannungs-Charakteristik abhängt. Für  $E \sim I^{-1}$ , also Hyperbelansatz, der für kleine Ströme näherungsweise gilt, ist der Faktor gleich 1. Für den Grenzfall sehr hohen Stromes

und völlig ionisierten Plasmas, wo  $E \sim I^{0.4}$  gilt, wird der Faktor gleich 0,3. Er ist also nur schwach veränderlich.

Könnte ein Plasma die Charakteristik  $E \sim I$  haben, dann würde der Faktor in der Klammer verschwinden und mit ihm auch die Zeitkonstante. Das leuchtet ein, denn  $E \sim I$  entspricht einem Ohmschen Widerstand und für diesen muß die Zeitkonstante verschwinden.

### Zusammenfassung

1. Es wird der Einfluß der Bindeenergie von Molekülen auf die Form der Temperaturverteilungskurve  $T(r)$  eines Lichtbogens diskutiert. Bei schwach gebundenen Molekülen, z.B.  $O_2$ ,  $S_2$ , bildet sich schon bei Strömen von wenigen Ampere ein schmaler, heißer Kern. Bei stark gebundenen Molekülen, z.B.  $N_2$ , entsteht ein Kern erst bei hohen Stromstärken.

2. Man kann zeigen, daß das Abklingen von Wärmeleitfunktion  $S$ , Temperatur  $T$  und Leitwert  $\sigma$  in einem plötzlich stromlosen Bogen im allgemeinen nur durch ein Spektrum von Zeitkonstanten beschrieben werden kann. Dieses kann man näherungsweise durch zwei Zeitkonstanten ersetzen, eine kleine, die das Abklingen des schmalen Bogenkernes und eine große, die die Abkühlung des breiten Temperaturberges, auf dem der Kern aufsitzt, beschreibt. Vgl. Abb. 5.

3. Die Zeitkonstante für das Abklingen des leitfähigen Bogenteils (Kern) ergibt sich näherungsweise a) bei völliger Abschaltung des Bogenstromes zu

$$\Theta = \frac{\pi r_0^2}{2,402 \pi k},$$

b) bei einer Stromstufe zu:

$$\Theta_{\text{Stufe}} = \frac{\pi r_0^2}{2,402 \pi k} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{d \log E}{d \log I} \right).$$

Beide Zeitkonstanten sind also dem leitfähigen Querschnitt  $\pi r_0^2$  direkt und der Temperaturleitfähigkeit  $k$  umgekehrt proportional. Bei einer Stromstufe ist  $\Theta$  noch schwach von der Neigung der Strom-Spannungs-Charakteristik abhängig.

Herrn Dr. H. MAECKER bin ich für die Anregung dieser Arbeit und für zahlreiche klärende Diskussionen zu Dank verpflichtet. Herrn Kollegen Dr. W. FRIEDLICH danke ich für seine Hilfe bei der quantitativen Formulierung.

**Literatur:** [1] KIRSCHSTEIN, B., u. F. KOPPELMANN: *Wiss. Veröff. Siemens-Konzern* 13, 52 (1934). — [2] MASON, F.O. In Monographie: *Circuit Breaking* von TRENCHAM, S. 157ff. London: Butterworth 1953. — [3] TER HORST, D.Th.J., u. G.A.W. RUTGERS: CIGRE Report 122 (1956). — [4] CASSIE, A.M.: CIGRE Report 102 (1939). — [5] CASSIE, A.M.: In Monographie: *Circuit Breaking* von TRENCHAM, S. 46ff. London: Butterworth 1953. — [6] CASSIE, A.M., and F.O. MASON: CIGRE Report 103 (1956). — [7] MAYR, O.: *Arch. Elektrotechn.* 37, 588 (1943). — [8] MAYR, O.: *ETZ* 64, 64 (1943). — [9] MAYR, O.: *ETZ* 75, 447 (1954). — [10] BROWNE jr., T.E.: *Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.* 67, 141 (1948). — [11] BROWNE jr., T.E.: *J. Electrochem. Soc.* 102, 27 (1955). — [12] BROWNE jr., T.E.: *Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs. General Meeting* Pittsburgh, 26. 10. 1958. — [13] SCHMIDT, E.: *Technischer Bericht SW/TPH* Nr. 86 v. 22. 8. 58 sowie KOPPLIN, H., u. E. SCHMIDT: *ETZ-A* 80, 805 (1959). — [14] BROWNE jr., T.E., K.H. YOON and H.F. SPINDLE: *Westinghouse Report E.N.G. MEMO SW 117* (1957). — [15] YOON, K.H., and H.F. SPINDLE: *Trans. Amer. Inst.*



Engts., General Meeting Pittsburgh, 26. 10. 1958. —  
ZÜCKLER, K., u. F. HAMMANN: Technischer Bericht SW/  
1. 68 v. 16. 7. 57. — ZÜCKLER, K.: Nr. 72 v. 27. 11. 57  
1. 77 v. 7. 3. 58. — [17] SCHMITZ, G.: Z. Naturforsch.  
15 (1950); 10a, 495 (1955). — [18] MAECKER, H.: Z.  
157, 1 (1959). — [19] KING, A.: Colloquium Spek-  
trum Internationale VI, Amsterdam. London: Per-  
son Press Ltd 1956. — [20] BURHORN, F.: Z. Physik  
157 (1959). — [21] YOON, K.H., T.E. BROWNE, H.F.  
and F.A. AZINGER: Westinghouse Report P.C.B.  
18-63009-06-1 v. August 1959, Siemens Nr. E/318. —

[22] FINKELNBURG, W., u. H. MAECKER: Elektrische Bögen  
und thermisches Plasma. Handbuch der Physik, Bd. XXII,  
S. 317 u. 382. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1959. —  
[23] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik,  
Bd. VI, S. 104ff. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft  
1947. — [24] BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers  
und Ingenieurs, Bd. VI, S. 132. Leipzig: Hirzel 1951.

Dr. GERHARD FRIND,

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke,  
Erlangen

## Beitrag zum Zusammenhang zwischen Lichtabsorption, Abklingzeit und absoluter Fluoreszenzquantenausbeute bei organischen Farbstoffmolekülen

Von HORST RAMMENSEE\* und VALENTIN ZANKER

(Eingegangen am 19. Februar 1960)

### Einleitung

Zur Aufklärung der nach der primären Licht-  
absorption in organischen Molekülen ablaufenden Se-  
kundärvorgänge wurde vor einiger Zeit begonnen [1]  
die Fluoreszenzquantenausbeute einiger dieser Ver-  
bindungen in Lösung bei verschiedenen Temperatu-  
ren und Konzentrationen zu bestimmen. Inzwischen  
ist die damals verwendete Apparatur verbessert  
und die Messdauer, Erweiterung des Meßbereichs  
(Erhöhung der Genauigkeit) und diese außerdem  
ausgebaut, daß auch absolute Quantenausbeuten  
ermittelt werden konnten. Es war uns schon früher  
klar, daß zur genaueren Kenntnis des Anregungs-  
zustands vielatomiger Moleküle die Quantenausbeute  
ausreicht. Es wurden deshalb in dieser Arbeit auch  
die Abklingzeiten, der integralen Absorp-  
tion sowie der Phosphoreszenz durchgeführt und Zu-  
sammenhänge zwischen diesen Größen aufzuzeigen  
versucht.

Zur Klärung des Zusammenhangs zwischen integraler Absorp-  
tion  $\epsilon(\nu)$ , mittlerer Lebensdauer  $\tau$  und absoluter  
Fluoreszenzquantenausbeute  $\eta_Q$  wurde für Atome im  
Jahre 1914 von R. LADENBURG theoretisch  
hergeleitet [2], [3]. Für Moleküle in Lösung wurde die  
Frage schon 1936 von G. BRAUN benutzt [4]. Für  
Moleküle in Lösung mit dem Schwerpunkt der ersten Absorp-  
tionsbande bei  $\bar{\nu}$  erhält man folgende angenäherte Be-  
ziehungen:

$$K = \frac{\tau \bar{\nu}^2}{\eta_Q} \int \epsilon(\bar{\nu}) d\nu, \quad (1)$$

wo  $K$  für alle Verbindungen in den verschiedensten  
Lösungsmitteln bei unterschiedlichsten Temperaturen  
und Konzentrationen eine Konstante sein soll.  
Bei der Ableitung der obigen Gleichung wurde die  
Lebensdauer des Emissionoszillators durch die  
Lebensdauer des Absorptionoszillators ersetzt, und letztere wieder  
als integrale Absorption ausgedrückt. Dies ist  
nur dann erlaubt, wenn für Absorption und  
Emission der gleiche Oszillator verantwortlich ist. Ist  
der Oszillator der ersten Absorptionsbande und der  
Emissionoszillator nicht identisch, ist  $K$  auch keine  
Konstante mehr.

Auszug aus der Dissertation der Fakultät für allgemeine  
Naturwissenschaften, Technische Hochschule München.

### Experimentelles und Meßmethodik

Zur Bestimmung der absoluten Quantenausbeuten  
diente die in [5] beschriebene Apparatur. Ergänzend  
dazu konnte an die Stelle der Küvette  $K$  eine MgO-  
Schicht gebracht werden. Aus deren reflektierter In-  
tensität wurde der Erregerlichtstrom nach dem Lam-  
bertschen Gesetz berechnet.

Die spektrale Empfindlichkeit des benutzten RCA-  
Multipliers 1P28 änderte sich im Laufe eines Jahres  
höchstens um  $\pm 2\%$ . Die Absolutempfindlichkeit des  
Multipliers sowie die Konstanz des Verstärkers und  
der Erregerlichtquelle wurden vor und nach jeder Mes-  
sung mit dem Reflexionsstandard aus MgO geprüft.

Bei der Messung wurde zunächst die Fluoreszenz-  
kurve punktweise gemessen und anschließend bei glei-  
chem Spalt, aber mit einer um einen bekannten Fak-  
tor kleineren Verstärkung (wegen der etwa 10mal grö-  
ßeren Intensität der Erregerlinie), die Energievertei-  
lung des vom MgO reflektierten Erregerlichts. Aus  
diesen beiden Messungen läßt sich mit Gl. (2) die ab-  
solute Fluoreszenzquantenausbeute ermitteln. Diese  
endgültige Auswertformel ging aus der in [1] benüt-  
zten hervor, die darin stehenden Größen haben folgende  
Bedeutung:

- $n$  = Brechungsindex des Lösungsmittels
- $f_{\lambda}^{\prime}$  = Reflexionskoeffizient des MgO bei  $\lambda$
- $Q$  = ein Koeffizient, der die Reflexionsverluste beim  
Ein- und Austritt aus der Küvettenvorder-  
fläche berücksichtigt
- $A_f(\lambda')$  = der dem Fluoreszenzlicht proportionale Galva-  
nometerausschlag
- $E_Q(\lambda)$  = spektrale Multiplierempfindlichkeit
- $\epsilon_{\lambda'}$  = dekadischer, molarer Extinktionskoeffizient  
bei der gerade gemessenen Wellenlänge (Be-  
rücksichtigung der Reabsorption des Fluor-  
eszenzlichts)
- $\epsilon_{\lambda}$  = dekadischer, molarer Extinktionskoeffizient  
bei der Erregerwellenlänge
- $c$  = Farbstoffkonzentration
- $a$  = effektive Schichtdicke
- $A_e(\lambda)$  = der dem Erregerlicht proportionale Galvano-  
meterausschlag.



Die absolute Lumineszenzquantenausbeute  $\eta_Q$  berechnet sich damit zu:

$$\eta_Q = \frac{4n^2 f_A''}{e} \frac{\int_{\text{Fluoreszenz}} \frac{A_f(\lambda') [\varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\lambda'}] d\lambda'}{E_Q(\lambda) \varepsilon_\lambda [1 - 10^{-(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\lambda'})ca}]}}{\int_{\text{Erregerlinie}} \frac{A_a(\lambda) d\lambda}{E_Q(\lambda)}} \quad (2)$$

Die Auswertung der beiden Integrale in der Auswerteformel erfolgte planimetrisch. Das Integral im Zähler stellt dabei die Fläche  $f$  einer auf Reabsorption und vollständige Absorption des Erregerlichts korrigierten Fluoreszenzkurve dar. Das Integral im Nenner ist die Fläche  $F$  der Quantenverteilung der Erregerlinie (366 nm). Dabei müssen beide Flächen im gleichen Energiemaß gemessen werden. Die Ermittlung der Brechungsindizes der verwendeten Lösungsmittel bei Zimmertemperatur erfolgt mit dem Zeiß-Refraktometer „Opton“. Der Brechungsindex von 96%igem Äthanol bei  $-180^\circ\text{C}$  wurde mit Hilfe eines gläsernen Hohlprismas, in dem Äthanol bis zur Temperatur des siedenden Sauerstoffs abgekühlt werden konnte, zu  $n = 1,45 \pm 0,01$  ermittelt.

Die etwa 0,5 mm dicken MgO-Schichten zur Bestimmung der Erregerintensität wurden vor jeder Messung auf einer Aluminiumscheibe über brennendem Mg-Band frisch erzeugt. Der Reflexionskoeffizient wurde aus der Literatur [7] entnommen. Die Reflexionsverluste beim Ein- und Austritt aus der Küvettenvorderfläche wurden mit einem Zeiß-Spektralphotometer PM Q II bestimmt.

Der Gesamtfehler der absoluten Lumineszenzquantenausbeute ergibt sich im wesentlichen (bei vernachlässigbarer Sekundärfluoreszenz und Ausbeutewerten größer als 0,1, d.h. geringem Streulicht) aus den Fehlern der beiden Flächen  $f$  und  $F$  in der Gl. (2), sowie dem Reflexionskoeffizienten des MgO. Bei ungünstigster Betrachtung dürften die in der Tabelle angegebenen Ausbeutewerte eine Genauigkeit von  $\pm 12\%$  besitzen.

Ein weiterer Fehler ergibt sich noch dann, wenn sich Fluoreszenz- und Absorptionsbanden eines mit großer Ausbeute fluoreszierenden Stoffes ( $\eta_Q$  nahe 1) überlappen. Die Korrektur auf Reabsorption kann dann, wie in [5] näher ausgeführt ist sehr beträchtlich werden. Das reabsorbierte Fluoreszenzlicht — das schon rechnerisch berücksichtigt wurde — kann dann nochmals Fluoreszenz von nur ungenau bestimmbarrem Einfluß hervorrufen [6]. Diese Sekundärfluoreszenz äußert sich in einer nach Gl. (2) bestimmten Absolutausbeute, die größer als 1 ist. Die Abweichungen der in dieser Arbeit angegebenen Ausbeutewerte von den früher in [1] bestimmten, ist hierauf zurückzuführen. Bei den früheren Messungen wurde der Einfluß der Sekundärfluoreszenz nicht berücksichtigt. Außerdem wird das Fluoreszenzlicht durch diesen Einfluß merklich depolarisiert. Bei Messungen der Lebensdauer äußert sich dieser Effekt in einer Erhöhung der Halbwertszeit.

Die in der Auswerteformel (2) stehenden, sowie die zur Ermittlung der integralen Absorption notwendigen  $\varepsilon$ -Werte, wurden mit einem Zeiß-Spektralphotometer PM Q II sowohl für  $+20^\circ\text{C}$  als auch für  $-180^\circ\text{C}$  gemessen.

Als proportionales Maß für die integrale Absorption wurde das Produkt aus dem maximalen Extinktionskoeffizienten und der Halbwertsbreite des ersten Elektronenüberganges verwendet. Danach ist die integrale Absorption nur von ähnlicher Genauigkeit wie die Fluoreszenzausbeute.

Die in der Tabelle erscheinenden mittleren Fluoreszenzabklingzeiten sind am physikalischen Institut Universität Gießen gemessen worden<sup>1</sup>. Die Meßmethode und die Beschreibung der Apparatur ist der Literatur [8] zu entnehmen. Der Meßbereich erstreckt sich von  $10^{-7}$  bis  $10^{-9}$  sec; er ist im mittleren Bereich am genauesten. Bei der Messung wird ein exponentielles Abklinggesetz vorausgesetzt. Ist dies bei dem jeweils vorliegenden Abklingvorgang nicht verwirklicht, so kann zu den Meßfehlern von etwa 10% noch ein systematischer Fehler kommen.

### Meßergebnisse und Diskussion

In der Tabelle sind alle in Abhängigkeit von Konstitution, Konzentration und Temperatur ermittelten Meßergebnisse der mittleren Lebensdauer, der Schwerpunktswellenzahl der ersten Absorptionsbande, der integralen Absorption und der absoluten Lumineszenzquantenausbeute zusammengestellt und daraus die Konstante  $K$  der Ladenburgschen Gl. (1) errechnet.

Bei der Betrachtung der Größe  $K$  in der letzten Spalte der Tabelle, die theoretisch für alle Substanzen unabhängig von Konzentration, Temperatur und Lösungsmittel eine Konstante sein sollte, fällt zunächst auf, daß beim Acridinorange- und dem N-Äthylacridinorange-kation diese Größe weit außerhalb der Fehlergrenzen liegt, die im Durchschnitt bei den anderen Substanzen festzustellen sind. Man sieht außerdem aus der Tabelle, daß  $K$  bei solchen Lösungsmitteln, Temperaturen und Konzentrationen zu groß ist, bei denen aus früheren Untersuchungen [5], [9] bekannt ist, daß diese Farbstoffe stark assoziieren. Die Erklärung für diesen ungewöhnlich großen  $K$ -Wert steht in diesem Fall also offensichtlich in engem Zusammenhang mit der Assoziations-tendenz. Aus den abweichenden  $K$ -Werten ist zu folgern, daß bei den assoziierenden Molekeln Absorptions- und Emissionsoszillator nicht identisch sind, wie dies auch aus der Theorie von FÖRSTER [10] für Farbstoffdimere hervorgeht.

In der vorhergehenden Arbeit [5] konnte sowohl aus dem Absorptions- als auch im Fluoreszenzpolarisations- und Fluoreszenzverhalten ein Nachweis eines energetisch tiefer liegenden Anregungszustandes bei Assoziaten gegeben werden. Wäre es dort möglich bei einer hochassozierten Acridinorange-Lösung als  $K$ -Wert in der Tabelle das Integral über die schwachen Vorbande einzusetzen, dann würde man sehr wahrscheinlich auch bei Assoziaten  $K$  als Konstante finden, denn der Absorptionsoszillator der Vorbande entspricht sicher dem Emissionsoszillator der dort nachgewiesenen roten Fluoreszenz. Diese Vorbande treten jedoch nur als Inflexion bei den höchsten Konzentrationen beobachtbar und deshalb ist weder ihr Maximum noch ihre Halbwertsbreite genauer bestimmbar.

<sup>1</sup> Wir danken Herrn Professor Dr. A. SCHMILLEN an der Stelle für sein besonderes Entgegenkommen und die Durchführung dieser Messungen.



Zusammenhang zwischen Lumineszenzausbeute, mittlerer Lebensdauer und integraler Absorption

Spektralanalyse Mittelwert Temperatur	Konzentration in mol/liter	$\eta_Q$ %	$\tau$ $10^{-9}$ sec	$\tilde{\nu}$ $\text{cm}^{-1}$	$\frac{e_{\max}}{\tilde{\nu}_F \cdot e_{\max}}$ $F = \tilde{\nu}_F \cdot e_{\max}$	$10^{-4} K = \frac{1}{\tau \tilde{\nu}^2 F}$ $\eta_Q$
Acridin — 180°	10 <sup>-3</sup>	15	14,8	26000 6,8 · 10 <sup>3</sup>	3,5 · 10 <sup>3</sup> 4000 1,40 · 10 <sup>7</sup>	95
Acridin Kation 20° C	10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	16 3	2 1	24600 6 · 10 <sup>3</sup>	3,2 · 10 <sup>3</sup> 4500 1,45 · 10 <sup>7</sup>	11 29
Acridin Kation — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	84 30 49	30 36 37	25000 6,3 · 10 <sup>3</sup>	3,2 · 10 <sup>3</sup> 4500 1,45 · 10 <sup>7</sup>	32 41 68
Acridin-Base 20° C	10 <sup>-3</sup>	18	12,5	22000 4,8 · 10 <sup>3</sup>	6 · 10 <sup>3</sup> 4500 2,7 · 10 <sup>7</sup>	90
Acridin-Base — 180°	10 <sup>-3</sup>	48	35	22000 4,8 · 10 <sup>3</sup>	5 · 10 <sup>3</sup> 4500 2,25 · 10 <sup>7</sup>	79
Acridin-Base 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	58 58 47	9,1 8,7 6,8	25000 6,3 · 10 <sup>3</sup>	8 · 10 <sup>3</sup> 4300 3,3 · 10 <sup>7</sup>	32 31 28
Acridin-Base — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	95 95 95	15 16,9 16,2	22800 5,2 · 10 <sup>3</sup>	1,2 · 10 <sup>4</sup> 3500 4,2 · 10 <sup>7</sup>	34 39 37
Acridin-K. 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	90 90 65	14,7 17,7 13,4	25000 6,3 · 10 <sup>3</sup>	8 · 10 <sup>3</sup> 3600 2,9 · 10 <sup>7</sup>	30 36 37
Acridin-K. — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	100 90 61	14,9 17,8 21	23300 5,4 · 10 <sup>3</sup>	1,5 · 10 <sup>4</sup> 3500 5,3 · 10 <sup>7</sup>	43 56 98
Acridin-Base 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	58 47 22	2,6 2,6 2	23800 5,7 · 10 <sup>3</sup>	5,2 · 10 <sup>3</sup> 4400 2,3 · 10 <sup>7</sup>	6 7 12
Acridin-Base — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	100 100 90	22 27 30	21600 4,7 · 10 <sup>3</sup>	5,8 · 10 <sup>3</sup> 3600 2,1 · 10 <sup>7</sup>	21 27 33
Acridin-K. — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup>	16 10	13 12,4	18600 3,5 · 10 <sup>3</sup>	5 · 10 <sup>3</sup> 3500 1,8 · 10 <sup>7</sup>	49 75
Acridin-Base 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	44 44 32	3 3,4 1,6	23250 5,4 · 10 <sup>3</sup>	8 · 10 <sup>3</sup> 4000 3,2 · 10 <sup>7</sup>	12 13 9
Acridin-Base — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	100 100 80	17,7 20 19,3	21400 4,6 · 10 <sup>3</sup>	8,3 · 10 <sup>3</sup> 3600 3 · 10 <sup>7</sup>	25 28 33
Acridin-K. 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	27 27 23	5,3 5,3 4,7	21300 4,6 · 10 <sup>3</sup>	1,4 · 10 <sup>4</sup> 4000 5,6 · 10 <sup>7</sup>	50 50 50
Acridin-K. — 180°	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	51 47 19	9,5 9,5 9,5	20200 4,1 · 10 <sup>3</sup>	1,4 · 10 <sup>4</sup> 3600 5 · 10 <sup>7</sup>	38 42 103
Acridin-Base — 180°	10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	40 40	28,5 28,5	22250 5 · 10 <sup>3</sup>	3 · 10 <sup>3</sup> 4600 1,4 · 10 <sup>7</sup>	50 50
Acridin-Base 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup>	76 75 34	4,4 4,4 3,3	20600 4,2 · 10 <sup>3</sup>	7,1 · 10 <sup>4</sup> 2100 15 · 10 <sup>7</sup>	37 37 61
Acridin-Base K. 20° C	10 <sup>-3</sup>	3	6	21800 4,7 · 10 <sup>3</sup>	2900 9,3 · 10 <sup>7</sup>	870
Acridin-Base K. — 180°	10 <sup>-5</sup> 10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup> 10 <sup>-2</sup> 5 · 10 <sup>-2</sup>	100 78 36 24 22	5,7 9,9 21 41 41	20000 4 · 10 <sup>3</sup>	18 · 10 <sup>7</sup> 12,5 · 10 <sup>7</sup> 11 · 10 <sup>7</sup>	46 91 292 750 750
Acridin-Base K. 20° C	10 <sup>-4</sup> 10 <sup>-3</sup>	4 1	2 2,5	21300 4,5 · 10 <sup>3</sup>	4,2 · 10 <sup>4</sup> 2200 9,2 · 10 <sup>7</sup>	210 1050
Acridin-Base K. 20° C	10 <sup>-3</sup>	100	5,5	20000 4 · 10 <sup>3</sup>	7,1 · 10 <sup>4</sup> 1200 8,5 · 10 <sup>7</sup>	19

Die Zunahme des Assoziationsgrades beim Acridinorange mit steigender Konzentration (in Äthanol bei — 180° C) zeigt sich nicht nur, wie dort aufgezeigt, im Intensitätswechsel der Banden des Absorptions- und Fluoreszenzspektrums, sondern, wie hier feststellbar, auch im Einfluß auf die Lumineszenzausbeute, die Lebensdauer und die Ladenburgsche Konstante  $K$ .

Die schon aus früheren Untersuchungen bekannte, extrem große Assoziationsstendenz des Acridinorange- und  $N$ -Äthylacridinorange-kations [9], [11] in Wasser zeigt sich jetzt auch hier in dem schon für relativ niedrige Konzentrationen ermittelten großen  $K$ -Wert.

Aus der Tabelle ist weiterhin zu entnehmen, daß bei den Kationen des Acridins, sowie des 2-, 3- und 9-Aminoacridins  $K$  ebenfalls konzentrationsabhängig ist. Die Zunahme von  $K$  mit der Konzentration erhärtet weiterhin den schon aus Fluoreszenzausbeute- und -kurven erhaltenen Befund, daß diese Stoffe in höheren Konzentrationen bei — 180° C ebenfalls teilweise als Assoziat vorliegen.

Neben diesen durch die verschiedenen Absorptions- und Fluoreszenzbanden bei der Assoziatbildung gegebenen Möglichkeiten zur Aufnahme und Abgabe strahlender Energie, existiert für die hier vorliegenden Acridinfarbstoffe noch eine weitere durch Phosphoreszenz. Hier wird man allerdings nicht versucht sein die Oszillatorenstärke des Phosphoreszenzzustandes mit einer Lebensdauer von 1 bis 2 sec durch die integrale Absorption in den Singulettzustand zu ersetzen. Eine einfache Überschlagsrechnung zeigt, daß der zu erwartende Absorptionskoeffizient vom Singulettgrund- in den Phosphoreszenzgrundzustand bei Gültigkeit der Ladenburgschen Formel etwa 10<sup>8</sup>mal kleiner zu erwarten ist, als der normale Singulett-Singulett-Absorptionskoeffizient. Dies stimmt auch mit der Erfahrung überein, denn eine Singulett-Triplettabsorption ist wegen des strengen Übergangsverbots Singulett-Triplett praktisch nicht beobachtbar. Bei den Kationen des 3- und 9-Aminoacridins, sowie des Acridinorange und des  $N$ -Äthylacridinorange, die in eingefrorener Lösung deutlich phosphoreszieren, darf jedoch der hohe  $K$ -Wert nicht zu falschen Schlüssen verleiten. In diesen Fällen ist für die scheinbare Unstimmigkeit der Ladenburgschen Formel die Assoziation und nicht die Phosphoreszenz verantwortlich. Die Tatsache, daß Phosphoreszenz bevorzugt bei den assoziationsfähigen Verbindungen auftritt, legt die Vermutung nahe, daß durch die elektronische Wechselwirkung im Assoziat das Übergangsverbot Singulett—Triplett gelockert und damit die Phosphoreszenz begünstigt wird. Gestützt wird diese Vorstellung dadurch, daß z. B. das 9-Aminoacridinkation in einer 10<sup>-2</sup> molaren Lösung eine Phosphoreszenzquantenausbeute von etwa 3% hat, während in verdünnterer Lösung (mit weniger Assoziaten) bei 10<sup>-3</sup> molar die Phosphoreszenzquantenausbeute schon auf etwa 0,5% abgesunken ist. Beim Acridinorange sind die Verhältnisse umgekehrt und dazu tritt auch noch eine Inversion auf. Die Phosphoreszenzquantenausbeute in konzentrierter Lösung bei 5 · 10<sup>-2</sup> beträgt nur etwa 0,2%, sie steigt dann bis 2 · 10<sup>-4</sup> molar zu einem Maximum von 4% an und sinkt dann wieder etwas ab. Geht man nun davon aus, daß beim Acridinorange, wie schon früher festgestellt wurde [9], [12], höhere Assoziat gebildet werden, dann wäre es vorstellbar, daß bevorzugt nur die Dimeren phosphoreszieren. Die Phosphoreszenz-



quantenausbeute würde dann im Konzentrationsbereich ein Maximum durchlaufen, in dem auch die Dimerkonzentration maximal ist. Andererseits gibt jedoch auch die in [12] gewählte Potentialkurvendarstellung mit dem Schnitt der Singulettpotentialanregungskurve im Minimum mit der Potentialkurve des Triplettgrundzustandes für diesen Befund eine ausreichende Erklärung.

Die Tabelle enthält nun noch einige weitere Stoffe mit einem relativ hohen  $K$ -Wert. Es sind die Basen des Acridins und des 2,3-Benzacridins. Die Abweichung vom Ladenburgschen Gesetz läßt sich hier weniger leicht begründen, denn diese Moleküle assoziieren nachweisbar nicht. Hier besteht jedoch die Möglichkeit, daß die Erhöhung des  $K$ -Wertes mit der stark konkurrierenden Photoreaktion der beiden Verbindungen in Zusammenhang zu bringen ist.

Schließlich bleiben noch drei Fälle zu besprechen, bei denen die Konstante  $K$  deutlich unter dem allgemeinen Mittelwert liegende Werte annimmt, nämlich die beim Acridinkation und der 2- und 3-Aminoacridinbase. Hier läßt sich unsicher ein Zusammenhang mit den extrem kurzen  $\tau$ -Werten finden. Es ist zu vermuten, daß die Messung so kurzer Abklingzeiten noch ungenauer ist als dies bisher schon vermutet wurde. Eine mögliche andere Erklärung wäre die, daß ein nicht streng exponentielles Abklinggesetz hier einen größeren Fehler als bei längeren Lebensdauern verursacht. Es ist hier weiter zu bemerken, daß bekannte Fehlerquellen, wie Verändern der Geometrie beim Vertauschen von Streufläche und Präparat, oder das zusätzliche Mitmessen von Erregerlicht zum schwachen Fluoreszenzlicht — besonders diskutabel bei Substanzen mit Fluoreszenz in der Nähe der Erregerlinie, denn dort besteht die Schwierigkeit geeignete Sperrfilter zu finden — nicht ausreichen, um diese Abweichungen zu kleineren Werten der Ladenburgschen Konstanten zu erklären.

Die Konstanten  $K$  der restlichen Substanzen bewegen sich alle zwischen  $25$  bis  $50 \cdot 10^5$ ; sie sind also innerhalb der gegebenen Fehlergrenzen der verschiedenen Meßgrößen als identische Werte anzusehen. Bei diesen Molekülen kann man also annehmen, daß das Ladenburgsche Gesetz gilt und daß das Fluoreszenzlicht auch wirklich aus dem energieniedrigsten Anregungszustand wieder ausgestrahlt wird. Die bisher

erreichte experimentelle Genauigkeit reicht jedoch noch nicht aus, um  $K$  in engen Grenzen als Konstante zu erkennen.

### Zusammenfassung

Es werden ergänzende Angaben zu einer Apparatur gemacht und ein Meßverfahren skizziert, mit dem absolute Lumineszenzquantenausbeuten von Lösungen organischer Moleküle bei verschiedenen Konzentrationen, bei Zimmertemperatur und der Temperatur des siedenden Sauerstoffs im Wellenlängenbereich von  $400$  bis  $700$  nm gemessen werden können. Die Fehler aller Meßgrößen werden diskutiert. Bei den Ergebnissen werden die Einflüsse von Reabsorption und Sekundärfluoreszenz sowie die Brechungsindizes der Lösungsmittel berücksichtigt. Die ermittelten Meßergebnisse, wie mittlere Lebensdauer, Schwerpunktwellenzahl der ersten Absorptionsbande, integrale Absorption und absolute Lumineszenzquantenausbeute in Abhängigkeit von Konstitution, Konzentration, Lösungsmittel und Temperatur werden in einer Tabelle zusammengestellt und die Gültigkeit der Ladenburgschen Formel geprüft. Die Abweichungen der Größe  $K$  in der Formel  $K = \frac{\tau \bar{\nu}^2}{\eta Q} \int \epsilon(\bar{\nu}) d\bar{\nu}$  werden diskutiert und die Ursachen dieser Abweichungen zu erklären versucht.

Wir möchten an dieser Stelle dem Institutsvorstand, Herrn Prof. SCHEIBE, für die Förderung unserer Arbeiten, sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Verband der chemischen Industrie für die Gewährung einer Personal- und Forschungsbefähigung bestens danken.

**Literatur:** [1] ZANKER, V., H. RAMMENSEE u. T. HABACH: Z. angew. Phys. **10**, 357 (1958). — [2] LADENBURG, R. Verh. dtsh. phys. Ges. **16**, 765 (1914). — [3] LADENBURG, R. Z. Physik **4**, 451 (1921). — [4] BRAUN, G.: J. Chim. phys. **32**, 558 (1936). — [5] ZANKER, V., M. HELD u. H. RAMMENSEE: Z. Naturforsch. **14b**, 789 (1959). — [6] BUDO, A., and J. KETZKEMÉTY: J. Chem. Phys. **25**, 595 (1956). — [7] BENFORD, L., G. P. LLOYD and S. SCHWARZ: J. Opt. Soc. Amer. **38**, 994 (1948). — [8] SCHMILLEN, A.: Z. Physik **135**, 294 (1953). — [9] ZANKER, V.: Z. phys. Chem. **199**, 225 (1952). — [10] FÖRSTER, T.: Fluoreszenz organischer Verbindungen. Göttingen: VANDENHOECK & RUPRECHT 1951. — [11] ZANKER, V. Habilschr., Fakultät für allg. Wiss. TH München 1954. — [12] ZANKER, V.: Z. phys. Chem. **200**, 250 (1952).

Dr. HORST RAMMENSEE,  
Privatdozent Dr. VALENTIN ZANKER  
Physikalisch-Chemisches Institut der TH München

## Buchbesprechungen

Wannier, G. H.: Elements of Solid State Theory. Cambridge: At the University Press 1959. 270 S. u. zahlr. Abb. Geb. 35 s.

Hier liegt eine ebenso kurze wie eigenwillige Darstellung der Theorie der Festkörper vor. Nur die grundlegenden Kapitel über die Eimelektronennäherung mit ihren Energiebändern und über die Gitterschwingungen folgen im großen ganzen den üblichen Bahnen, obwohl auch hier manche neue Züge festzustellen sind. Im allgemeinen weicht aber das Buch von den gewohnten Darstellungen stark ab und versucht vielfach weniger bekannte, vor allem übergeordnete Gesichtspunkte herauszuarbeiten. So werden z. B. Ferromagnetismus und Phasenübergänge mit Hilfe des Ising-Modells als „kooperative Phänomene“ zusammengefaßt. Aber auch die Kapitel über Kristallographie, Leitfähigkeit und Halbleiter sind ganz unorthodox; letzteres beruht größtenteils auf eigenen Arbeiten

des Verfassers. Schließlich enthält das Buch noch einen Abschnitt über Kristallbindung.

Mit den Vorzügen einer eigenwilligen Darstellung muß man natürlich in Kauf nehmen, daß manche Punkte an anderer Stelle erscheinen, als man es gewohnt ist, und manche recht kurz weggelassen (z. B. das Problem der effektiven Masse). Überhaupt kann das Buch bei seinem geringen Umfang nur eine Auswahl bieten, wobei grundsätzliche Fragen stets dem Vorrang vor Einzelproblemen genießen; letztere sind teilweise in Form von Aufgaben am Ende der Kapitel angeschnitten. Auch die Ableitungen sind oft recht knapp oder überhaupt nur qualitativ formuliert. So geht das Buch teils tiefer als die üblichen Darstellungen, teils muß es wieder an der Oberfläche bleiben. Sein Studium ist daher nicht immer einfach. Insgesamt bildet WANNIERS Werk weniger eine erste Einführung, als eine Überschau über einige wesentliche Züge der Festkörperphysik.

A. HAUG